Funkcija prenosa linearnog sistema

Posmatra se kontinualni, linearni, stacionarni sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom prikazan na slici 1.

Slika 1

Definicija: Funkcija prenosa sistema se definiše kao odnos Laplasove transformacije izlazne (y(t)) i ulazne (u(t)) veličine, uz pretpostavku da su svi početni uslovi nulti i da je $u(t)=y(t)\equiv 0 \ \forall t<0$.

U opštem slučaju je sistem sa jednim ulazom i jednim izlazom opisan diferencijalnom jednačinom

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} +...+ a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{d^1y}{dt^1} + a_0 y = b_m\frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} +...+ b_1\frac{d^1u}{dt^1} + b_0 u. \quad (1)$$

Ako se na jednačinu (1) primeni Laplasova transformacija, uz uvažavanje nultih početnih uslova, sledi

$$s^nY + a_{n-1}s^{n-1}Y +...+ a_2s^2Y + a_1sY + a_0Y = b_ms^mU + b_{m-1}s^{m-1}U +...+ b_1sU + b_0U, \quad (2)$$

odnosno

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} +...+ b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} +...+ a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

Napomene i ograničenja

Na ovakav način se funkcija prenosa može definisati samo za linearne stacionarne sisteme. Nestacionarni sistemi, često nazivani i vremenski promenljivi sistemi poseduju jedan ili više parametara koji su funkcije vremena (promenljivi parametri) i u tom slučaju je nemoguća primena Laplasove transformacije.

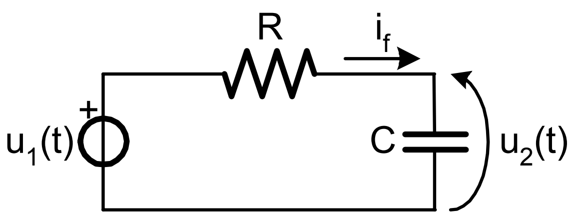
Funkcija prenosa uzuma u obzir samo zavisnost ulaz-izlaz i ne pruža nikakvu informaciju o unutrašnjoj strukturi i ponašanju sistema.

Primer 1. a) Odrediti prenosnu funkciju *G(s)=U₂(s)/U₁(s)*, električnog kola sa slike.
b) Odrediti odziv kola ($u_2(t)$) na pobudu:

b1) $u_1(t)=\delta(t)$;

b2) $u_1(t)=U\,h(t)$.

Početni uslovi su nulti.



Rešenje

a) $i(t) = C\dfrac{du_2(t)}{dt}$;

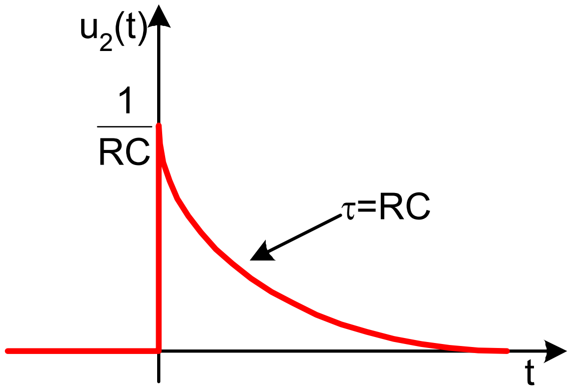
$$u_1(t) = Ri(t) + u_2(t) = u_2(t) + RC\frac{du_2(t)}{dt} \;/\mathscr{L} \Rightarrow U_1(s)=U_2(s)(1+RCs)$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

b1) $u_1(t)=\delta(t) \Rightarrow U_1(s)=1.$

$$U_2(s) = \frac{1}{RCs+1}\cdot 1 = \frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \;/\mathscr{L}^{-1} \Rightarrow u_2(t) = \frac{1}{RC}\cdot e^{-\frac{t}{RC}}\cdot h(t).$$

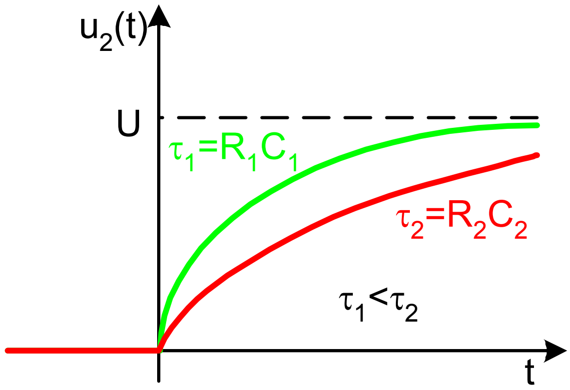
Odziv sistema je prikazan na slici.



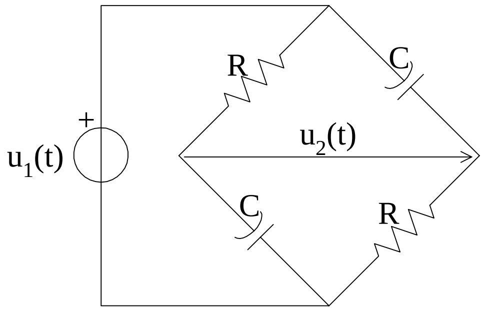
b2) $u_1(t)=U\,h(t) \Rightarrow U_1(s) = \dfrac{U}{s}.$

$$U_2(s) = \frac{1}{RCs+1}\cdot\frac{U}{s} = \frac{U}{RC}\cdot\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = U\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right] \;/\mathscr{L}^{-1} \Rightarrow u_2(t) = U\left[1-e^{-\frac{t}{RC}}\right]\cdot h(t).$$

Odziv, za različite vremenske konstante τ_1 i τ_2 je prikazan na slici.

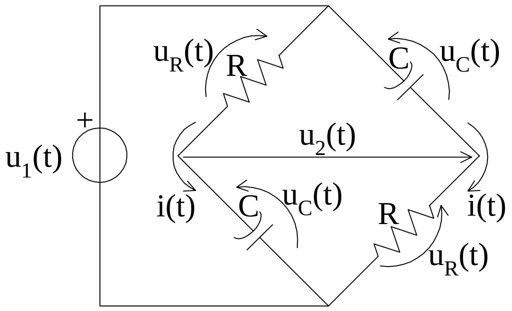


Primer 2. a) Odrediti prenosnu funkciju *G(s)=U₂(s)/U₁(s)*, električnog kola sa slike.
b) Odrediti odziv kola ($u_2(t)$) na pobudu $u_1(t)=\sin t$. Početni uslovi su nulti.



Rešenje

a)



$u_1(t)=u_R(t)+u_C(t)$; $u_1(t)=u_R(t)-u_C(t)$; $u_R(t)=Ri(t)$; $u_C(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$.

$$u_{1C}(t)=Ri(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt \quad /\mathscr{L} \Rightarrow U_1(s)=\frac{RCs+1}{Cs}\cdot I(s)$$

$$u_{1C}(t)=Ri(t)-\frac{1}{C}\int i(t)dt \quad /\mathscr{L} \Rightarrow U_1(s)=\frac{RCs-1}{Cs}\cdot I(s)$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\frac{RCs-1}{RCs+1}=\frac{s-\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}$$

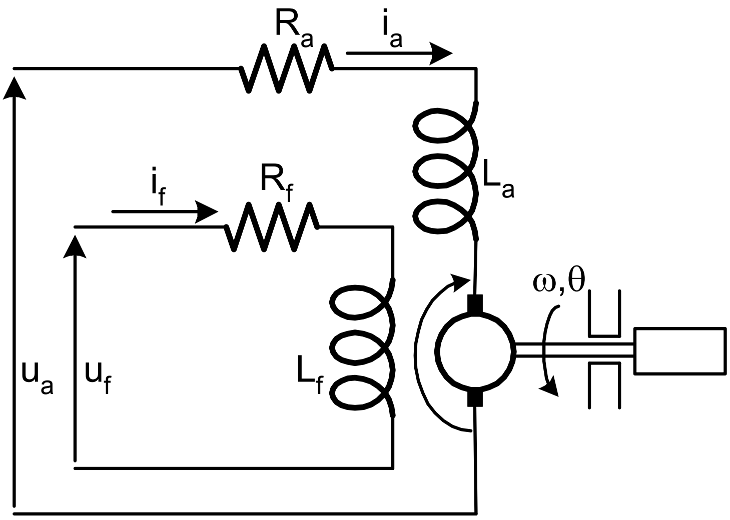
b) $u_1(t)=\sin t \Rightarrow U_1(s)=\frac{1}{s^2+1}$

$$T=RC \Rightarrow G(s)=\frac{s-\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}$$

$$U_2(s)=\frac{s-\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{T}}\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{2T}{T^2+1}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{T^2-1}{T^2+1}\cdot\frac{1}{s^2+1}-\frac{2T}{T^2+1}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$u_2(t)=\frac{2T}{T^2+1}\cdot\cos t+\frac{T^2-1}{T^2+1}\cdot\sin t-\frac{2T}{T^2+1}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Primer 3. Na slici je šematski prikazan jednosmerni motor upravljan strujom rotora (sa nezavisnom pobudom). Odrediti funkciju prenosa koja opisuje zavisnost položaja rotora (θ) od napona rotora (u_a). Pretpostaviti da se radi o opsegu brzina do nominalne ($\omega \leq \omega_n$) i da je fluks u mašini Ψ_f=const. (pobudnia struja $i_f = I_f$=const).



Rešenje.

Jednačine koje opisuju dinamiku jednosmernog motora su

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + \Psi_f \omega \tag{1}$$

$$T_m = J\frac{d\omega}{dt} + b\omega + T_L \tag{2}$$

$$T_m = \Psi_f i_a \tag{3}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{4}$$

Neka sa posmatra mašina u praznom hodu, tako da je T_L=0. Nakon primene Laplasove transformacije na izraze (1)-(4), i smene izraza (3) i (4) u (1) i (2) sledi

$$U_a(s) = R_a I_a(s) + L_a s I_a(s) + \Psi_f s\theta(s) \tag{5}$$

$$\Psi_f I_a(s) = Js^2\theta\,(s) + bs\theta(s) \tag{6}$$

Iz jednačine (6) se može izraziti I_a i to zameniti u (5). Nakon sređivanja sledi izraz

$$\Psi_f U_a(s) = s\left[R_a Js + R_a b + L_a Js^2 + L_a bs + \Psi_f^2\right]\theta(s). \tag{7}$$

Na osnovu izraza (7), piše se funkcija prenosa

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{\Psi_f}{s\left[L_a Js^2 + L_a bs + R_a Js + R_a b + \Psi_f^2\right]}, \tag{8}$$

odnosno

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{\Psi_f}{s\left[\left(L_a s + R_a\right)\cdot(Js + b) + \Psi_f^2\right]}. \tag{9}$$

Pošto je L_a jako malo $\approx$1mH za motor od par kW, to je i električna vremenska konstanta induktora mnogo manja od mehaničke (1ms električne u odnosu na 100ms mehaničke konstante) tako da se La može zanemariti, pa ceo model poprima sledeći, jednostavniji, oblik

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{\Psi_f}{s\left[R_a \cdot (Js + b) + \Psi_f^2\right]}. \tag{10}$$

Jednačina (10) se može, deljenjem brojioca i imenioca sa ($R_a b+\Psi_f^2$), transformisati u oblik

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{\dfrac{\Psi_f}{R_a b+\Psi_f^2}}{s\left[\dfrac{R_a J}{R_a b+\Psi_f^2}s + 1\right]}. \tag{11}$$

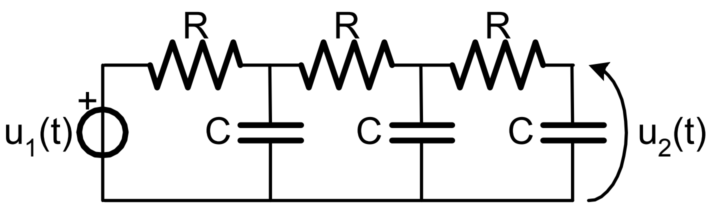
Ako se uvedu oznake $K = \dfrac{\Psi_f}{R_a b+\Psi_f^2}$ i $T = \dfrac{R_a J}{R_a b+\Psi_f^2}$, tada se izraz (11) može napisati u obliku

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K}{s[Ts + 1]} \tag{12}$$

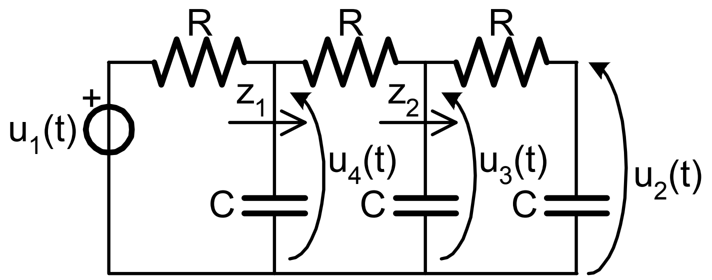
Na osnovu jednačine (12) direktno se može napisati funkcija prenosa koja opisuje zavisnost brzine motora (ω) od napona rotora (u_a)

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K}{Ts + 1}. \tag{13}$$

Primer 4. Za električno kolo na slici odrediti funkciju prenosa $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$



Rešenje:



Impedanse $z_1(s)$ i $z_2(s)$ se izračunavaju na sledeći način

$$z_2(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right) \| \frac{1}{Cs} = \frac{RCs+1}{Cs(RCs + 2)} \tag{1}$$

$$z_1(s) = \left(R + z_2(s)\right) \| \frac{1}{Cs} = \frac{(RCs)^2 + 3RCs +1}{Cs((RCs)^2 + 4RCs + 3)}. \tag{2}$$

Prema pravilu naponskog razdelnika pišu se sledeće jednačine

$$U_4(s) = \frac{z_1(s)}{R + z_1(s)} U_1(s) \tag{3}$$

$$U_3(s) = \frac{z_2(s)}{R + z_2(s)} U_4(s) \tag{4}$$

$$U_2(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} U_3(s) = \frac{1}{1 + RCs} U_3(s) \tag{5}$$

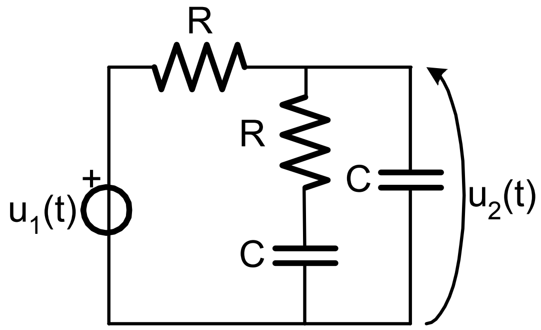
Smenom izraza (3) u (4), a zatim (4) u (5) dobija se

$$U_2(s) = \frac{1}{1 + RCs} \frac{z_2(s)}{R + z_2(s)} \frac{z_1(s)}{R + z_1(s)} U_1(s). \tag{6}$$

Konačno je funkcija prenosa

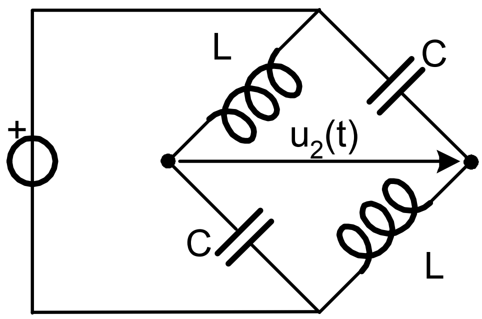
$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{(RCs)^3 + 5(RCs)^2 + 6RCs + 1}. \tag{7}$$

Primer 5. Za električno kolo na slici odrediti funkciju prenosa $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$



Rešenje: $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1 + RCs}{(RCs)^2 + 3RCs + 1}$

Primer 6. Za električno kolo na slici odrediti



a) funkciju prenosa $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$, usvojiti oznaku T=LC.

b) odziv $u_2(t)$ za pobudni signal $u_1(t)=\cos(\omega t)$.

Rešenje:

a) $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1 - Ts^2}{1 + Ts^2}$.

b) Odziv sistema u kompleksnom domenu je $U_2(s)=G(s)U_1(s)$. Slika pobudnog signala u kompleksnom domenu je $U_1(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$. Sada je izraz za odziv

$$U_2(s) = \frac{1 - Ts^2}{1 + Ts^2}\frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

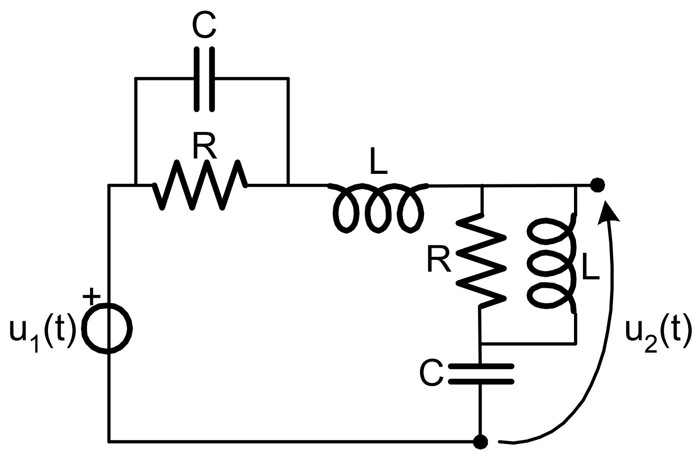
Nakon faktorizacije prethodnog izraza sledi

$$U_2(s) = -\frac{2}{1 - T\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2 + \frac{1}{T}} + \frac{1 + T\omega^2}{1 - T\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

pa je odziv $u_2(t)$

$$u_2(t) = -\frac{2}{1 - T\omega^2}\cdot\cos\left(\frac{t}{\sqrt{T}}\right) + \frac{1 + T\omega^2}{1 - T\omega^2}\cdot\cos(\omega t).$$

Primer 7. Za električno kolo na slici odrediti



a) funkciju prenosa $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$,

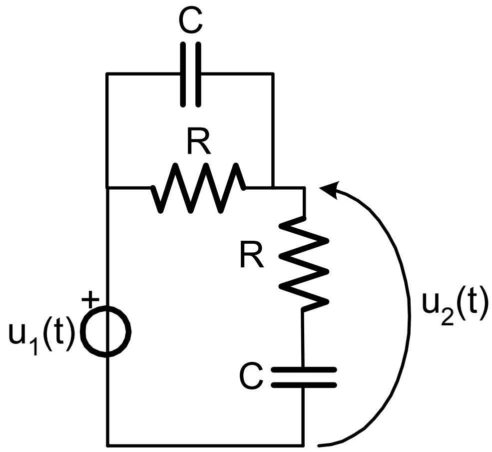
b) ako je R=0, odziv $u_2(t)$ za pobudni signal $u_1(t)=h(t)$.

Rešenje:

a) $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{RCs + 1}{LCs^2 + 2RCs + 1}$.

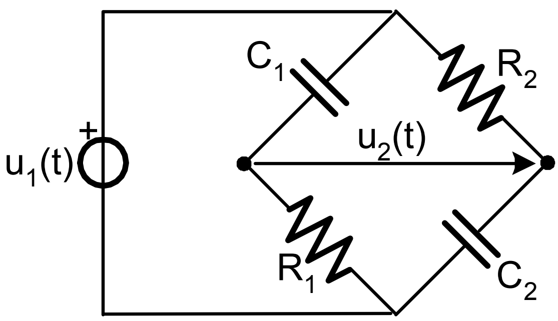
b) $R=0 \Rightarrow G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{LCs^2 + 1} \Rightarrow u_2(t) = \left[1 - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)\right]h(t)$

Primer 8. Za električno kolo na slici odrediti funkciju prenosa $G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$



Rešenje: $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)} = \dfrac{(Ts)^2 + 2Ts + 1}{(Ts)^2 + 3Ts + 1}$; T=RC.

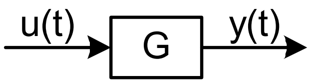
Primer 9. Za električno kolo na slici odrediti funkciju prenosa $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)}$



Rešenje: $G(s) = \dfrac{U_2(s)}{U_1(s)} = \dfrac{1 - T_1T_2s^2}{(T_1s + 1)\,(T_2s + 1)}$; $T_1=R_1C_1$, $T_2=R_2C_2$.

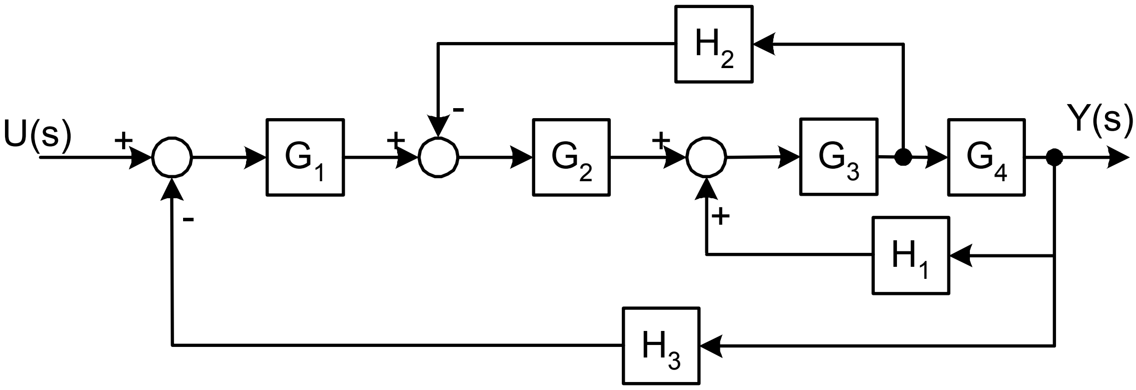
Algebra funkcije prenosa

Sistem automatskog upravljanja se često predstavlja na način prikazan na slici 1



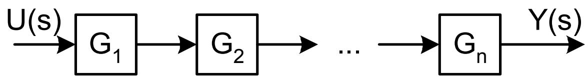
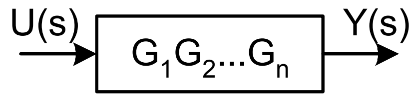
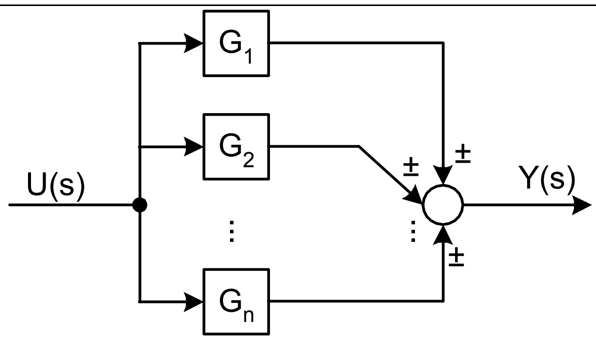
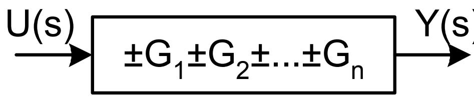
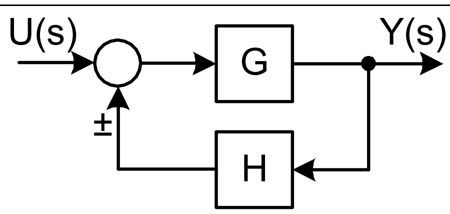
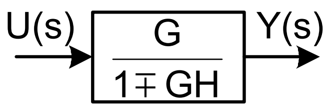
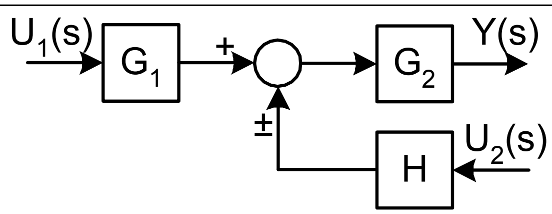
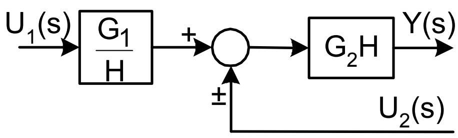
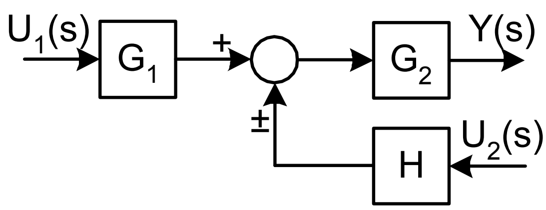
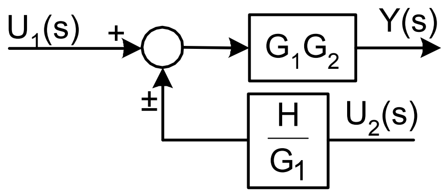
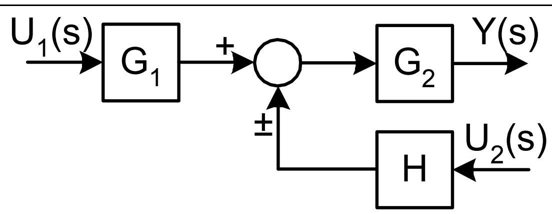
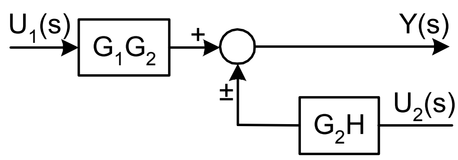
Slika 1

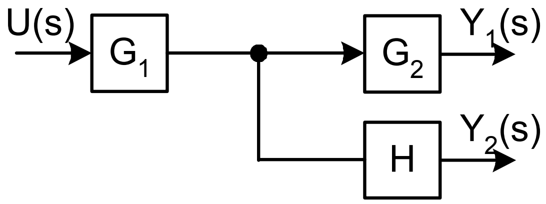
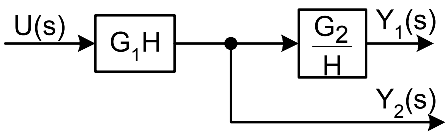
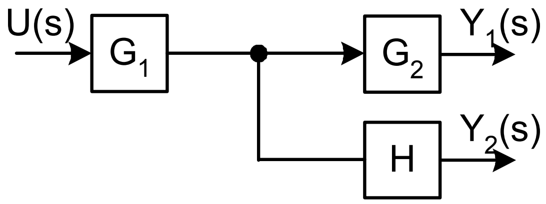
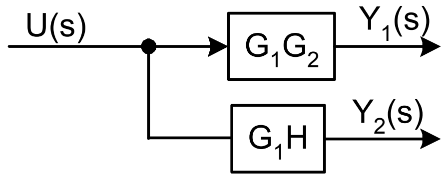
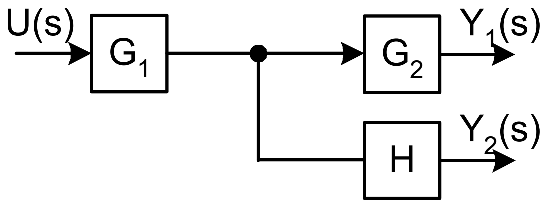
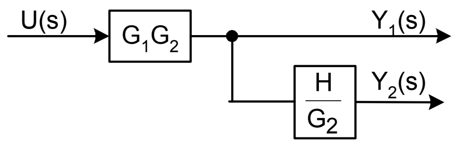
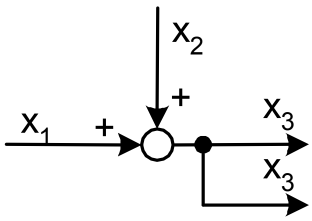
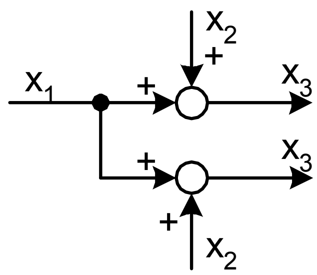
Ovakav način predstavljanja sistema se naziva blok dijagram. Matematički model sistema gde je veza između pojedinih komponenti prikazana blok dijagramima se naziva strukturni blok dijagram. Strukturni blok dijagram jednog sistema je prikazan na slici 2. Ovakav način predstavljanja modela sistema je zgodan jer ukazuje na unutrašnju strukturu sistema i međusobne veze između pojedinih promenljivih veličina. Ipak, za detaljniju analizu ponašanja sistema potrebna je funkcija prenosa koja se sa strukturnog blok dijagrama najčešće ne može direktno očitati. Radi određivanja funkcije prenosa na osnovu strukturnog blok dijagrama (SBD) sistema potrebno je uprostiti SBD do nivoa prikazanog na slici 1. U cilju simplifikacije SBD primenjuje se skup pravila - algebra funkcije prenosa. Neka od pravila algebre funkcije prenosa su prikazana u tabeli 1.



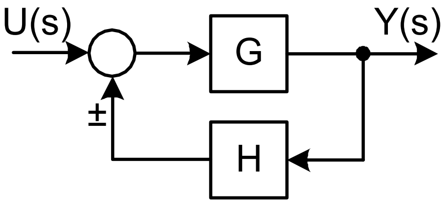
Slika 2.

Tabela 1. Pravila algebre funkcije prenosa

Elementi vezani na red		
Elementi vezani u pralelu		
Svođenje povratne sprege na jedan blok		
Premeštanje bloka H iz povratne grane		
Premeštanje diskriminatora ispred bloka G_1		
Premeštanje diskriminatora iza bloka G_2		

Premeštanje bloka H iz direktne grane		
Premeštanje tačke račvanja (čvora) ispred bloka G_1		
Premeštanje tačke račvanja (čvora) iza bloka G_2		
Deljenje diskriminatora na dva dela		

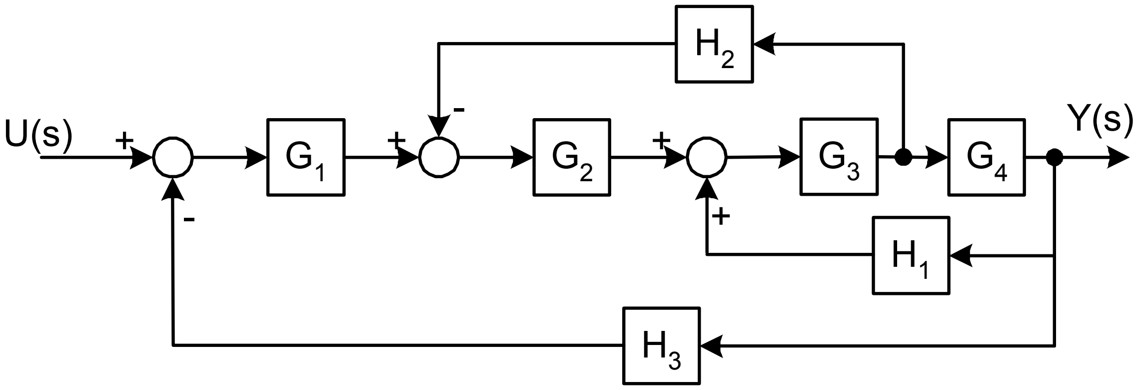
Ako se posmatra sistem sa povratnom spregom (slika 3) na njemu se mogu definisati dve karakteristične funkcije prenosa sistema.



Slika 3.

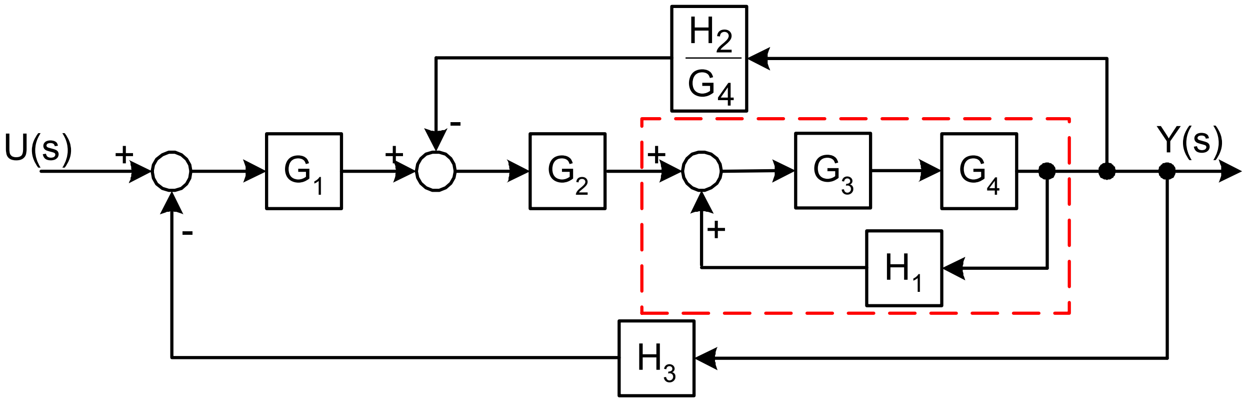
Funkcija prenosa sistema sa zatvorenom povratnom spregom $W_S(s) = \frac{G}{1 \mp GH}$ naziva se ***funkcija spregnutog prenosa*** (funkcija prenosa zatvorenog kola), dok se funkcija prenosa sistema sa otvorenom povratnom spregom $W(s) = GH$ naziva ***funkcija povratnog prenosa*** (funkcija prenosa otvorenog kola).

Primer 1. Primenom algebre funkcije prenosa odrediti funkciju prenosa $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ sistema sa slike 1.



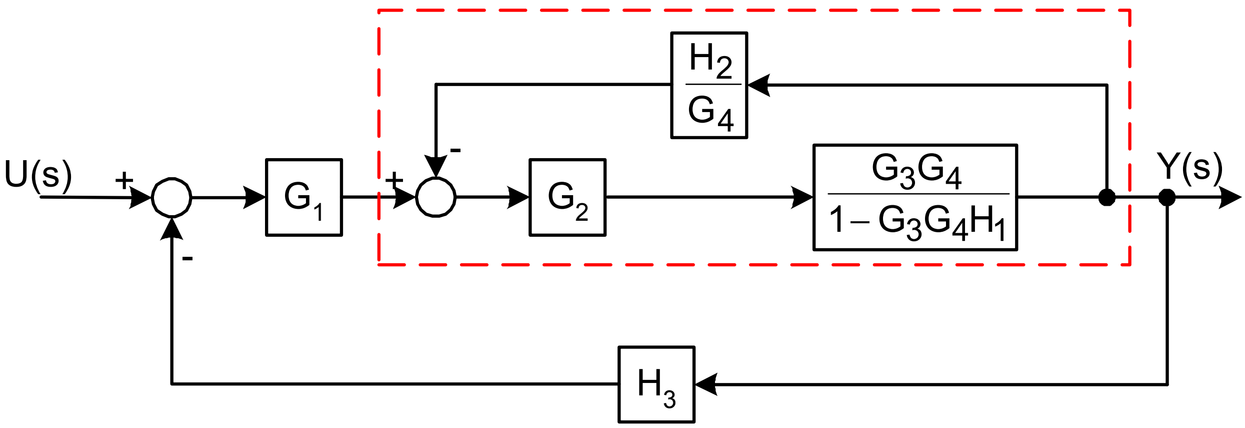
Slika 1.

Rešenje.
Za početak se može čvor koji se nalazi između blokova G_3 i G_4 premestiti iza bloka G_4, tako da se dobija SBD, prikazan na slici2.



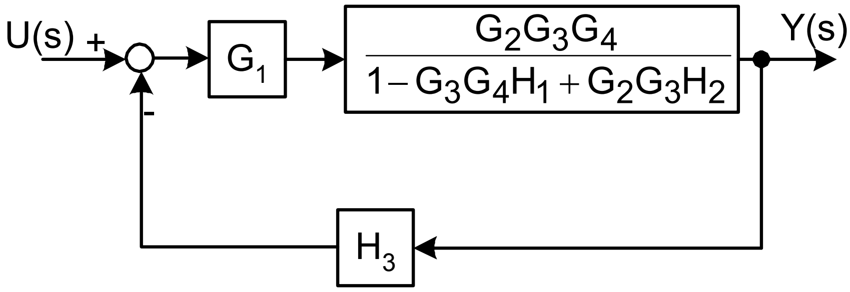
Slika 2.

Sada se može svesti povratna sprega uokvirena crtkastom linijom na slici 2. Nakon transformacije se dobija SBD prikazan na slici 3.



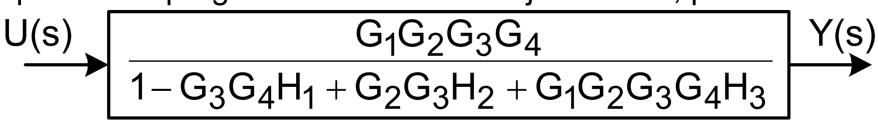
Slika 3.

Sada se može eliminisati povratna sprega uokvirena crtkastom linijom na slici 3. Pre toga je potrebno pomnožiti funkcije prenosa redno vezanih elemenata G_2 i $\frac{G_3G_4}{1 - G_3G_4H_1}$. Na ovaj način se SBD transformiše u dijagram prikazan na slici 4.



Slika 4.

Sada se množe funkcije prenosa redno vezanih elemenata G_1 i $\frac{G_2G_3G_4}{1 - G_3G_4H_1 + G_2G_3H_2}$.
Nakon toga se povratna sprega sa slike 4 svodi na jedan blok, prikazan na slici 5.

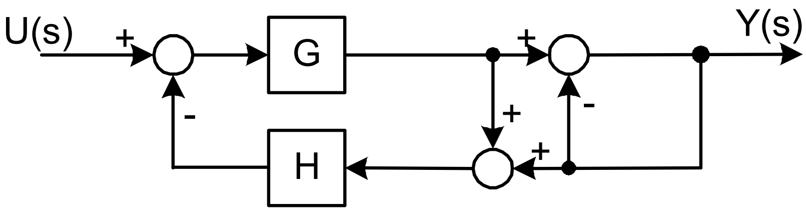


Slika 5.

Tako da je funkcija prenosa sistema

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{1 - G_3G_4H_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_2G_3G_4H_3}$$

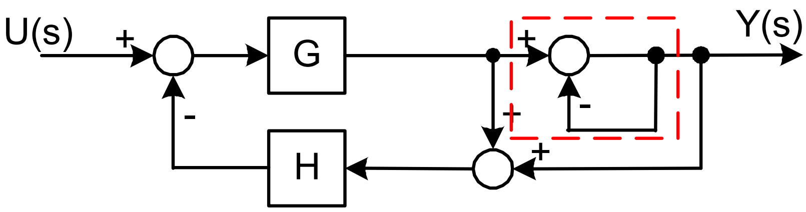
Primer 2. Primenom algebre funkcije prenosa odrediti funkciju prenosa $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ sistema sa slike 1.



Slika 1.

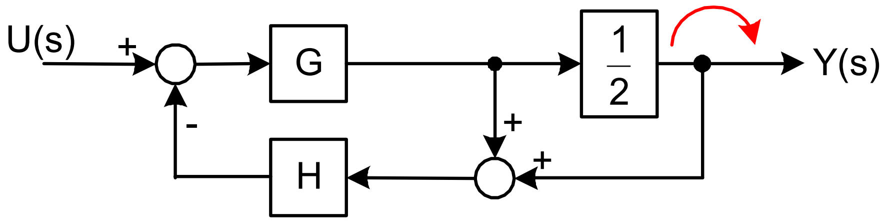
Rešenje

Za početak je zgodno transformisati SBD tako da se čvor kod izlaza Y(s) podeli na dva dela, tako da je uokvirena povratna sprega jasno uočljiva (slika 2). Sada se povratna sprega može uprostiti i dobija se SBD prikazan na slici 3.



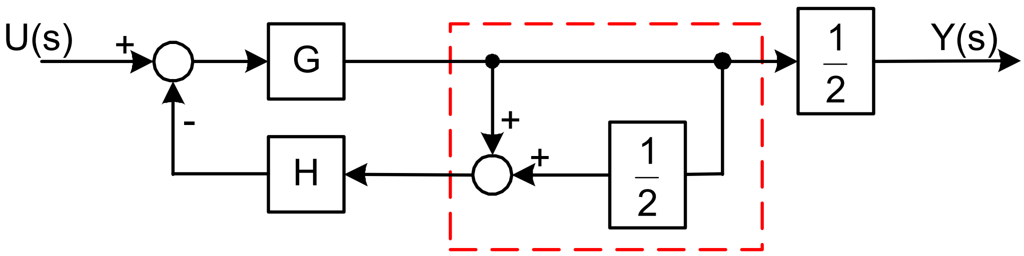
Slika 2.

Sada se blok 1/2 može premestiti iza čvora (prikazano strelicom na slici 3), i SBD transformisati u oblik prikazan na slici 4.



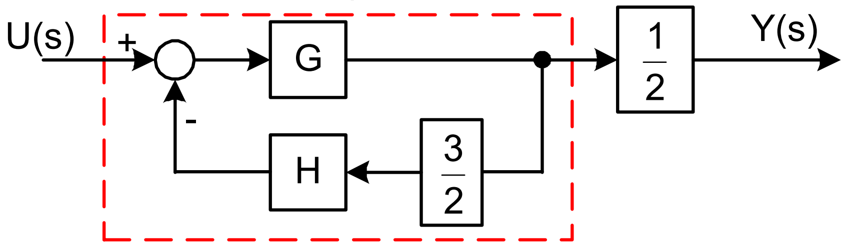
Slika 3.

Sada se paralelna veza dve grane (uokvireno, slika 4), svodi na jednu i dobija se SBD prikazan na slici 5.



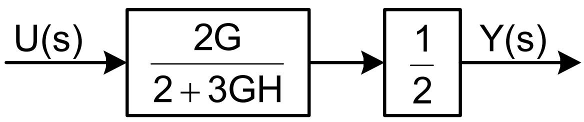
Slika 4.

Sledeći korak je svođenje povratne sprege (uokvireno na slici 5) na jednu direktnu granu i SBD transformiše u oblik prikazan na slici 6.



Slika 5.

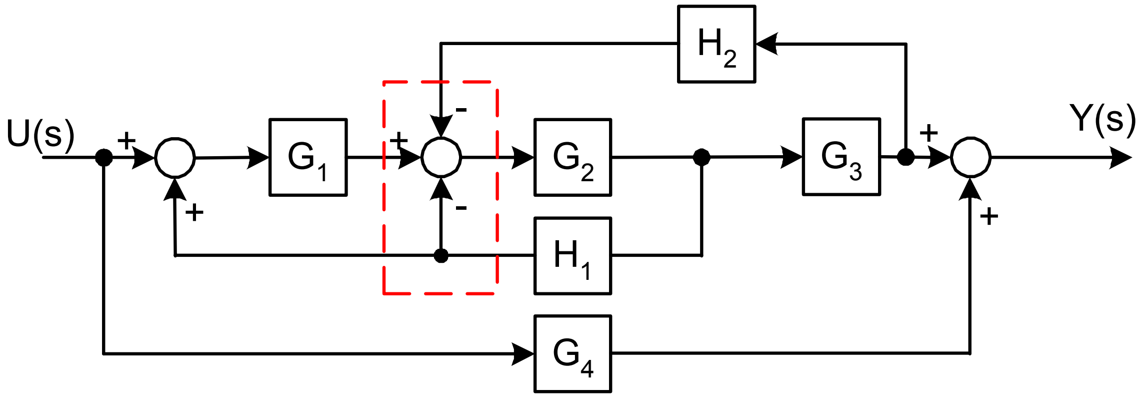
Poslednji korak je množenje funkcija prenosa redno vezanih elemenata prikazanih na slici 6 i formiranje traženog blok dijagrama sa funkcijom prenosa sistema, prikazanog na slici 7.



Slika 6.

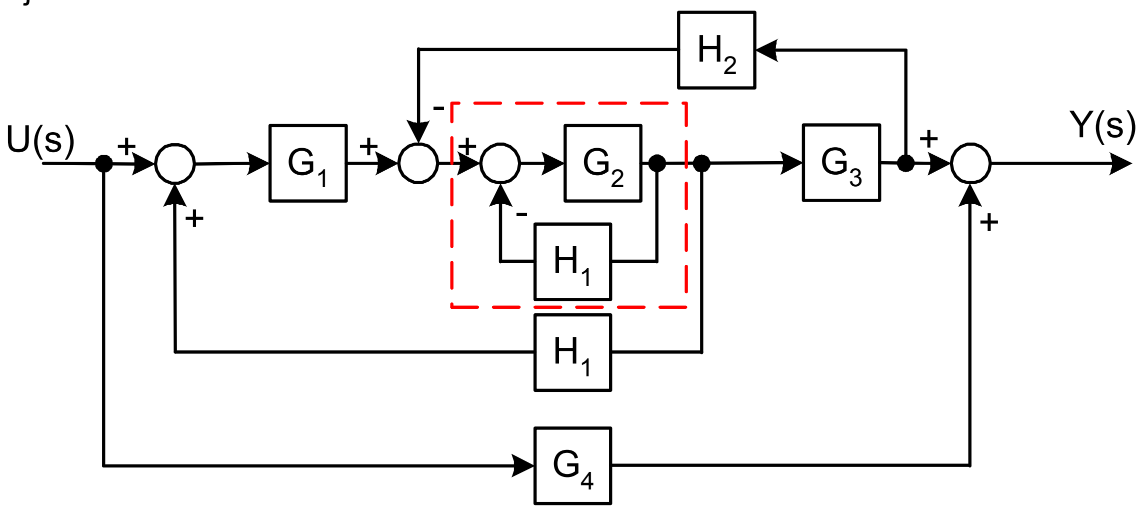
Slika 7.

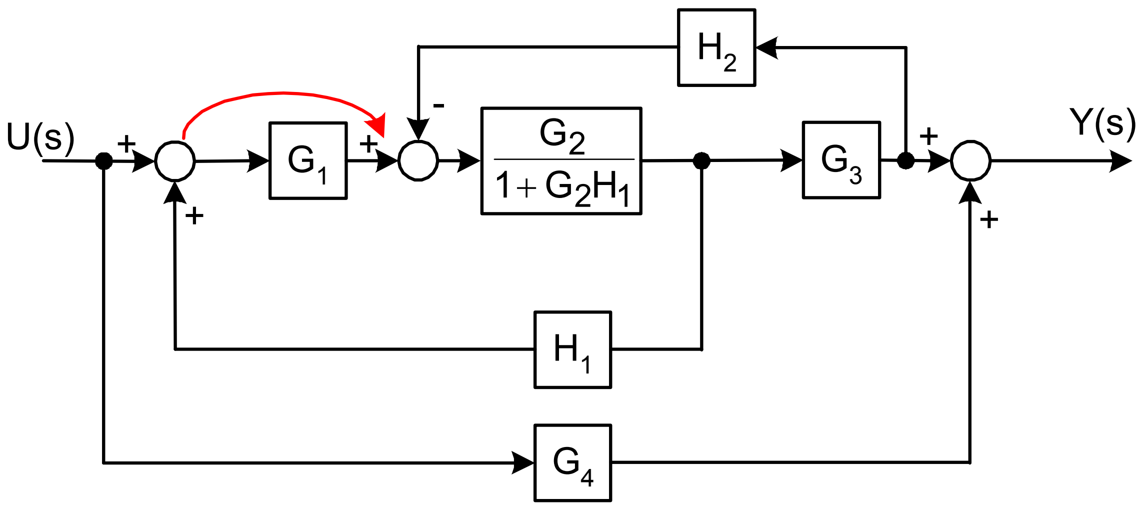
Primer 2. Primenom algebre funkcije prenosa odrediti funkciju prenosa $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ sistema sa slike 1.

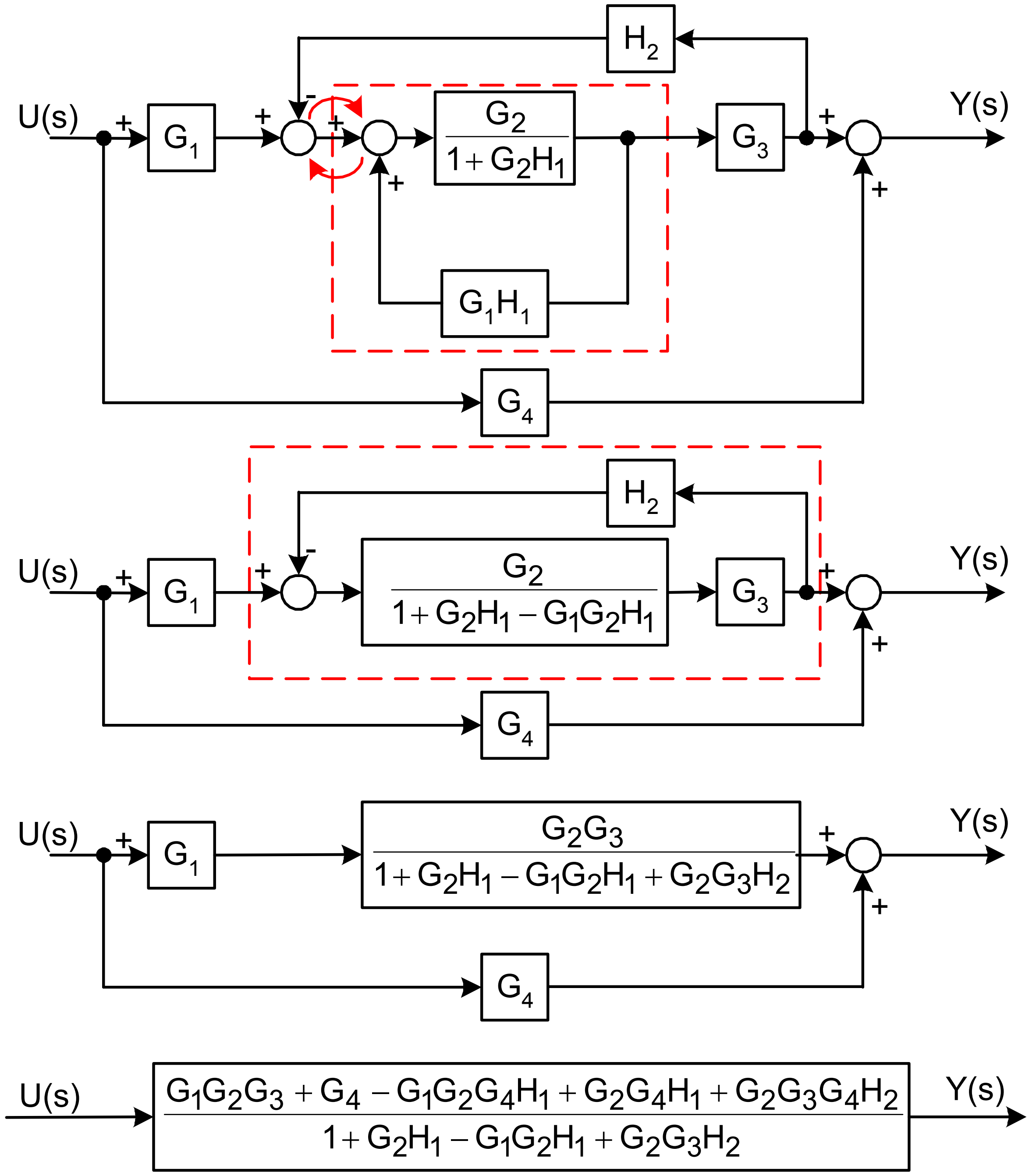


Slika 1.

Rešenje







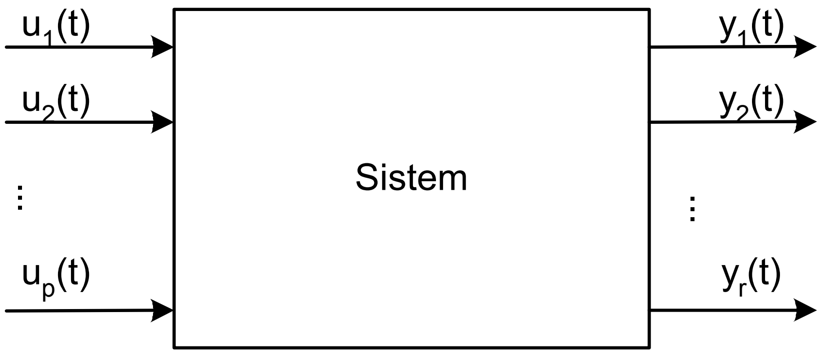
Graf toka signala

Transformacija i redukcija modela SAU predstavljenih preko SBD je nekada veoma komplikovana i teška (sistemi složenije strukture). Alternativnu metodu je ponudio Mason i ona se bazira na predstavi sistema preko linijskih segmenata i teoriji grafova. Metoda se zove graf toka signala, i pruža mogućnost određivanja odnosa između promenljivih veličina u sistemu bez transformacija grafa toka signala (redukcije grafa, transformacije i ostalih operacija neophodnih u slučaju SBD).

Šta je graf toka signala (GTS)? GTS je dijagram koji se sastoji od čvorova međusobno povezanih granama (linijama) i predstavlja grafičku reprezentaciju seta (skupa) linearnih relacija. Jedan GTS i njegov ekvivalentni blok dijagram su prikazani na slici 1.

Funkcija prenosa multivarijabilnih sistema

Posmatra se sistem sa *p* ulaza i *r* izlaza, prikazan na slici 1.



Slika 1.

Po pretpostavci je ovaj sistem linearan (klasa sistema koja se proučava u okviru ovog kursa), tako da se pri određivanju njegovog odziva može primeniti teorema superpozicije. To znači da je odziv linearnog sistema na složenu pobudu (u obliku sume prostih pobuda) jednak sumi odziva na svaku prostu pobudu pojedinačno i da se za neki i-ti izlaz važi

$$Y_i(s)= G_{i1}(s)U_1(s) + G_{i2}(s)U_2(s) + ... + G_{ip}(s)U_p(s), \qquad (1)$$

gde je $G_{ij}(s) = \left.\frac{Y_i(s)}{U_j(s)}\right|_{U_k=0;\forall k\neq j}$. Sada se mogu napisati izrazi za sve izlaze $Y_i(s)$, i=1:r, što u matričnom obliku izgleda

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ . \\ . \\ . \\ Y_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & ... & G_{1p}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & ... & G_{2p}(s) \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & ... & G_{rp}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ . \\ . \\ . \\ U_p(s) \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

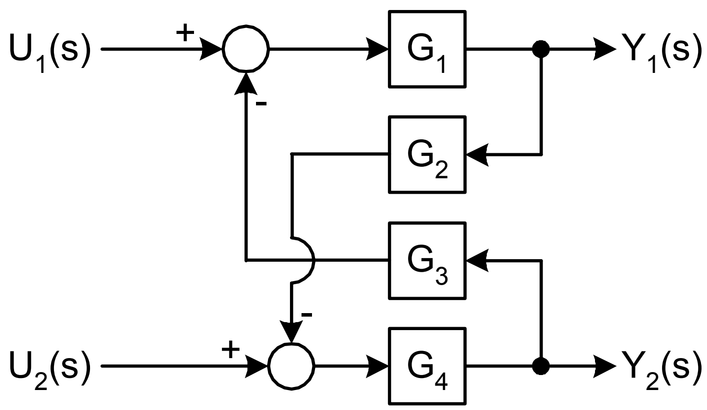
odnosno

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s), \qquad (3)$$

gde matrica **G**(s) predstavlja funkciju prenosa multivarijabilnog sistema, odnosno **G**(s) je matrica funkcija prenosa multivarijabilnog sistema. Matrica **G**(s) je dimenzija rxp, odnosno ima onoliko vrsta koliko sistem ima izlaza, broj kolona je jednak broju ulaza u sistem.

Svaki multivarijabilni sistem poseduje jedan jedini jedinstveni karakteristični polinom. Ako imenioci svih funkcija prenosa matrice **G**(s) nisu jednaki, tada je karakteristični polinom sistema njihov najmanji zajednički sadržalac.

Primer 1. Odrediti matricu funkcija prenosa multivarijabilnog sistema prikazanog na slici 1.
a) primenom algebre funkcije prenosa;
b) primenom grafa toka signala.

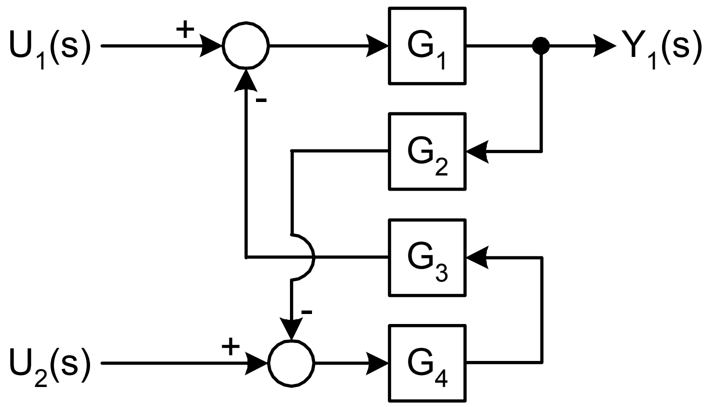


Slika 1.

Rešenje
Prema definiciji matrica funkcija prenosa će biti u obliku

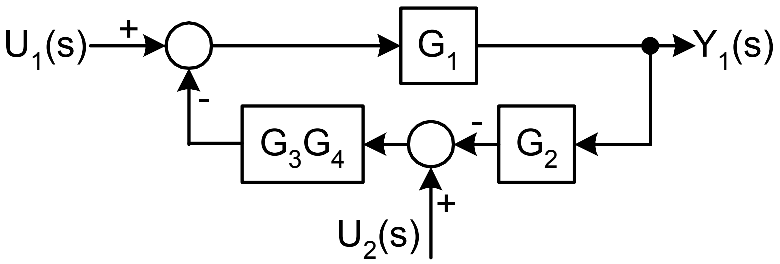
$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

a) Funkcije W_{11} i W_{12} se određuju uz zanemarivanje izlaza Y_2, tako da je odgovarajući blok dijagram prikazan na slici 2.



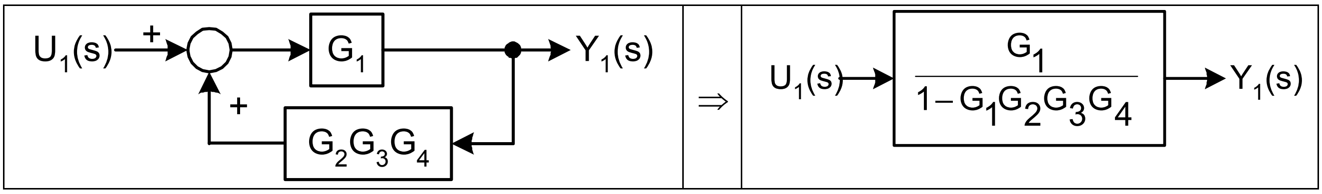
Slika 2.

SBD sa slike 2 se može jednostavnije nacrtati, što je prikazano na slici 3.



Slika 3.

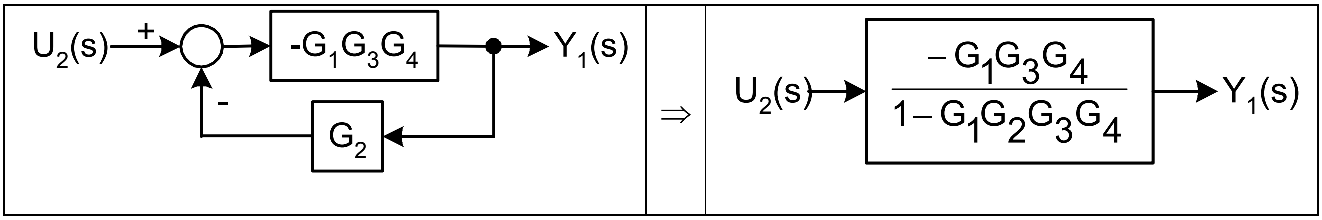
Pri određivanju W_{11}, smatra se da je U_2=0. Odgovarajući blok dijagram je prikazan na slici 4.



Slika 4.

Funkcija prenosa je $W_{11} = \dfrac{G_1}{1 - G_1G_2G_3G_4}$.

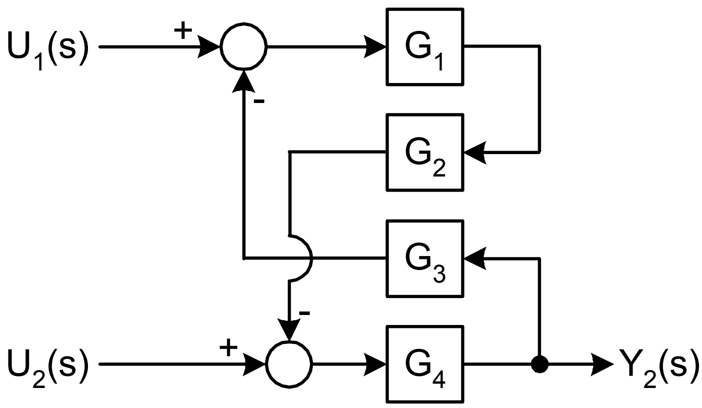
Pri određivanju W_{12}, smatra se da je U_1=0. Odgovarajući blok dijagram je prikazan na slici 5.



Slika 5.

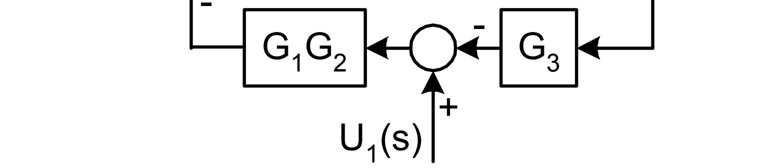
Funkcija prenosa je $W_{12} = \dfrac{-G_1G_3G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4}$.

Funkcije W_{21} i W_{22} se određuju uz zanemarivanje izlaza Y_1, tako da je odgovarajući blok dijagram prikazan na slici 6.



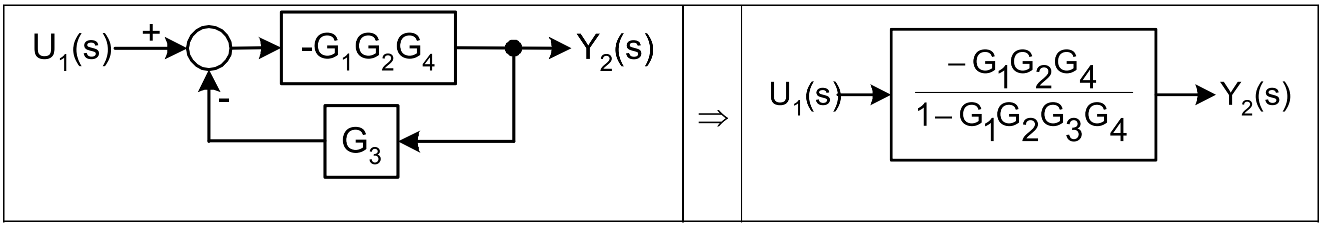
Slika 6.

SBD sa slike 6 se može jednostavnije nacrtati, što je prikazano na slici 7.



Slika 7.

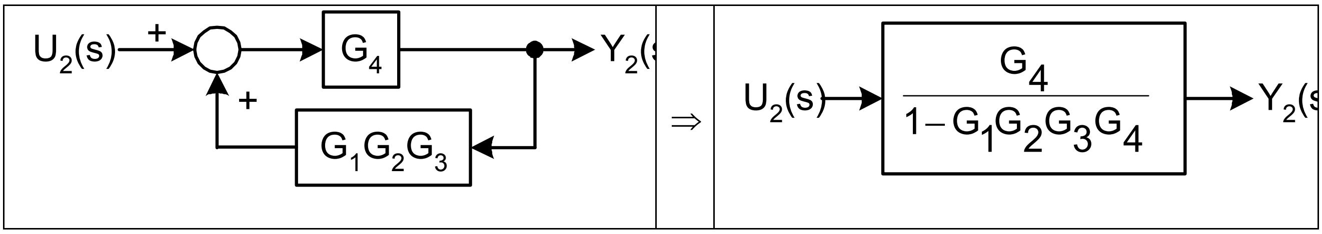
Pri određivanju W_{21}, smatra se da je U_2=0. Odgovarajući blok dijagram je prikazan na slici 8.



Slika 8.

Funkcija prenosa je $W_{21} = \frac{-G_1G_2G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4}$.

Pri određivanju W_{22}, smatra se da je U_1=0. Odgovarajući blok dijagram je prikazan na slici 9.



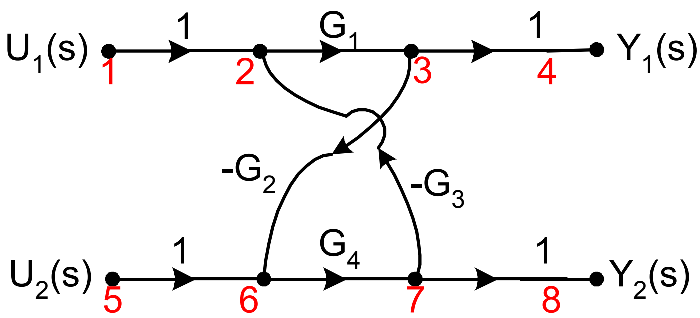
Slika 9.

Funkcija prenosa je $W_{22} = \frac{G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4}$.

Funkcija prenosa sistema u matričnom obliku je

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3G_4} \cdot \begin{bmatrix} G_1(s) & -G_1(s)G_3(s)G_4(s) \\ -G_1(s)G_2(s)G_4(s) & G_4(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

b) Graf toka signala sistema je prikazan na slici 10.



Slika 10.

Pri određivanju funkcije prenosa multivarijabilnog sistema prvo se određuju sve direktne pitanje od svih ulaza do svih izlaza

$U_1 \rightarrow Y_1$: $P_1 = G_1$;

$U_1 \rightarrow Y_2$: $P_2 = -G_1G_2G_4$;

$U_2 \rightarrow Y_1$: $P_3 = -G_1G_3G_4$;

$U_2 \rightarrow Y_2$: $P_4 = G_4$;

Zatvorene putanje su jedinstvene za ceo sistem. U ovom slučaju postoji jedna zatvorena putanja $P_{11} = G_1G_2G_3G_4$, tako da je determinanta grafa $\Delta = 1 - G_1G_2G_3G_4$. Sada se mogu odrediti Δ_i, i oni su $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$.

Elementi matrice funkcija prenosa sistema su

$$W_{11}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2=0} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1}{1 - G_1G_2G_3G_4})$$

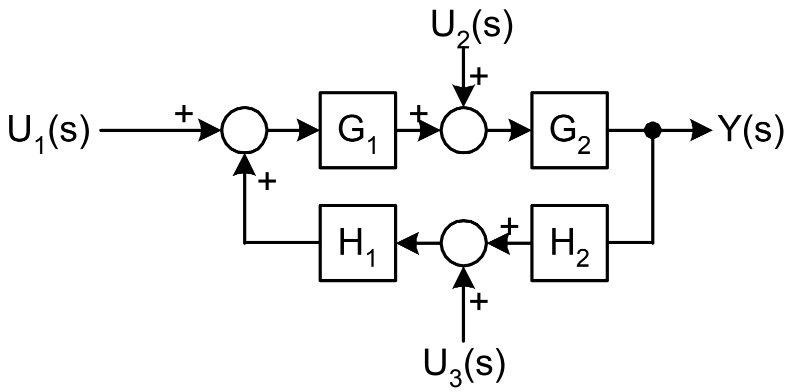
$$W_{12}(s) = \frac{Y_1(s)}{U_2(s)}\bigg|_{U_1=0} = \frac{P_3\Delta_3}{\Delta} = \frac{-G_1G_3G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4})$$

$$W_{21}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2=0} = \frac{P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{-G_1G_2G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4})$$

$$W_{22}(s) = \frac{Y_2(s)}{U_2(s)}\bigg|_{U_1=0} = \frac{P_4\Delta_4}{\Delta} = \frac{G_4}{1 - G_1G_2G_3G_4})$$

Matrica funkcija prenosa je identična rešenju zadatka pod a), što se i očekivalo.

Primer 2. Odrediti funkciju prenosa u matričnom obliku za sistem sa tri ulaza i jednim izlazom prikazan na slici 1.



Slika 1.

Rešenje

$$W_{11}(s) = \frac{Y(s)}{U_1(s)}\bigg|_{U_2=U_3=0} = \frac{G_1G_2}{1 - G_1G_2H_1H_2})$$

$$W_{12}(s) = \frac{Y(s)}{U_2(s)}\bigg|_{U_1=U_3=0} = \frac{G_2}{1 - G_1G_2H_1H_2})$$

$$W_{13}(s) = \frac{Y(s)}{U_3(s)}\bigg|_{U_1=U_2=0} = \frac{G_1G_2H_1}{1 - G_1G_2H_1H_2})$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & W_{13}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}$$

Analiza sistema automatskog upravljanja primenom računara

Računarski model SAU u matematičkoj formi pogodnoj da tačno opiše ponašanje sistema se koristi da bi se ispitale osobine i projektovalo upravljanje sistemom bez njegove fizičke realizacije.

Simulacija ponašanja sistema pomoću računara služi da se ispita rad sistema u različitim uslovima i za različite pobudne signale. Izvršene simulacije mogu da budu različitog kvaliteta (tačnosti). To pre svega zavisi od usvojenog modela sistema.

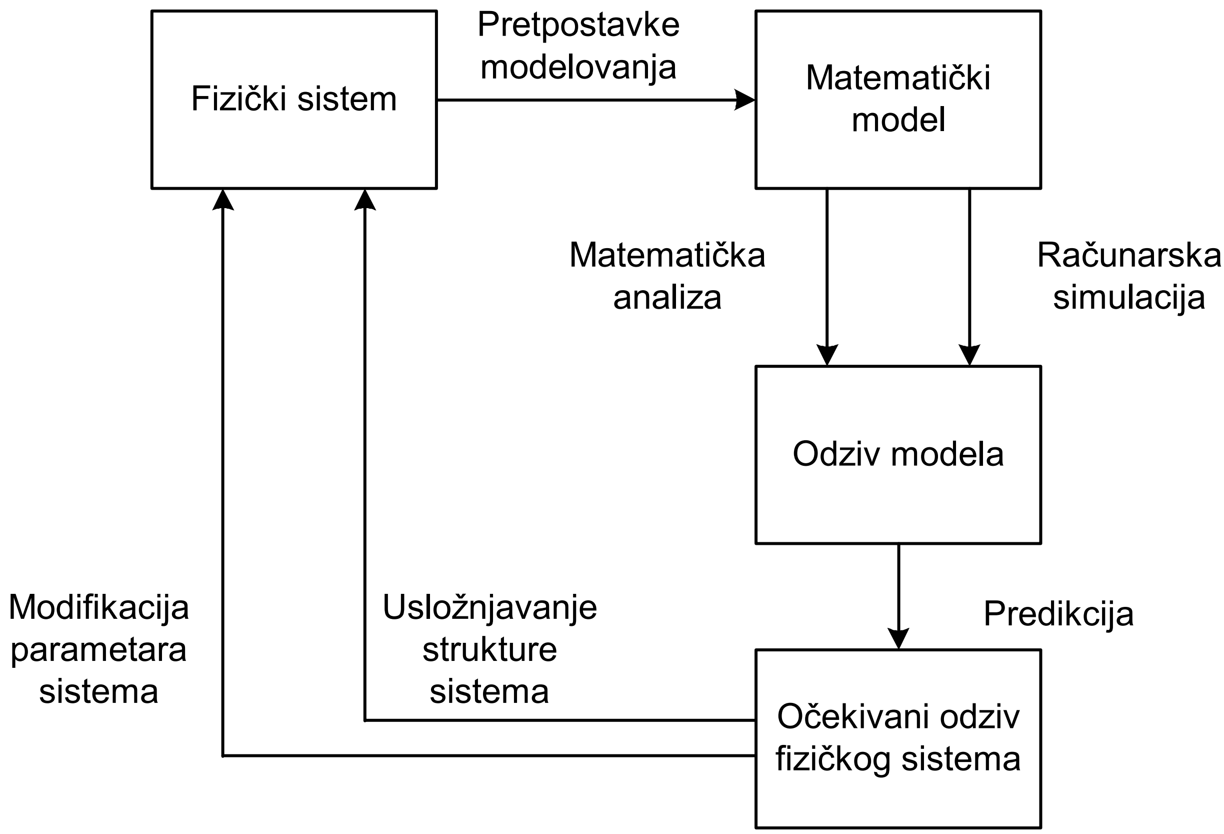
U ranim fazama projektovanja, kad se bira strategija upravljanja i ocenjuju neke globalne karakteristike sistema nisu potrebni detaljni modeli. Tada se koriste i odgovarajući programski paketi koji su laki za korišćenje, omogućuju dobru vizualizaciju dobijenih rezultata, jednostavno formiranje modela i vršenje simulacija. U ovoj fazi procesorska brzina nije od velikog značaja. U ovoj fazi se vrše simulacije niske tačnosti jer su usvojene mnoge pretpostavke, redukcije i uprošćenja (linearizacija, na primer).

U kasnijim fazama projektovanja se vrše takozvani numerički eksperimenti, kada se model sistema i uslovi pod kojima on radi formiraju puno realističnije. Tada se formira detaljan model sistema uz uvažavanje svih njegovih specifičnosti. Takvi modeli se obično sastoje od velikog broja diferencijalnih jednačina (često su to parcijalne, nelinearne DJ) tako da je za vršenje simulacija na takvim modelima procesorska brzina (snaga računara) od prvenstvenog značaja. U ovoj fazi se vrše simulacije visoke tačnosti. Uobičajeni alati za formiranje ovih simulacionih modela su FORTRAN, C, C++, ADA i slični programski jezici.

Pod pretpostavkom da je moguće formirati matematički model sistema proizvoljne tačnosti prednosti računarske simulacije su sledeće:

1. Performanse sistema se mogu razmatrati za prouzvoljne uslove rada;
2. Rezultati dobijeni u realnom sistemu se mogu ekstrapolirati simulacionim modelom u cilju vršenja predikcije ponašanja sistema;
3. Moguće je ispitivanje ponašanja sistema u cilju utvrđivanja njegove koncepcije;
4. Testiranja sistema se mogu obaviti u mnogo kraćem roku;
5. Simulacije koštaju znatno manje nego eksperiment na živom sistemu;
6. Moguće su studije hipotetičkih situacija, praktično neostvarivih u realnom svetu;
7. Računarsko modelovanje i simulacija su često jedina izvodljiva i sigurna tehnika za analizu i procenu ponašanja sistema.

Analiza i projektovanje SAU primenom računarskih simulacija je prikazana na slici 1.



Slika 1. Analiza i projektovanje SAU primenom računarskih simulacija.