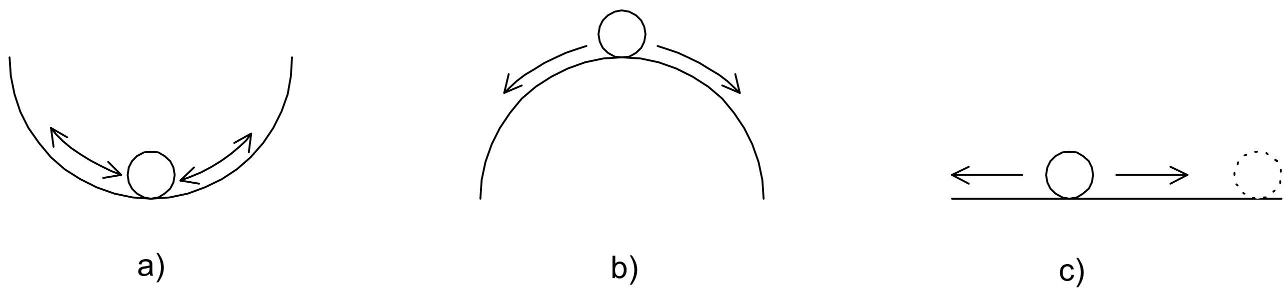
Stabilnost linearnih sistema automatskog upravljanja

Najvažnija osobina SAU jeste stabilnost. Generalni zahtev koji se postavlja pred projektanta jeste da projektovani i realizovani SAU bude stabilan (u praksi postoje izuzeci, ali to izlazi van okvira ovog kursa).

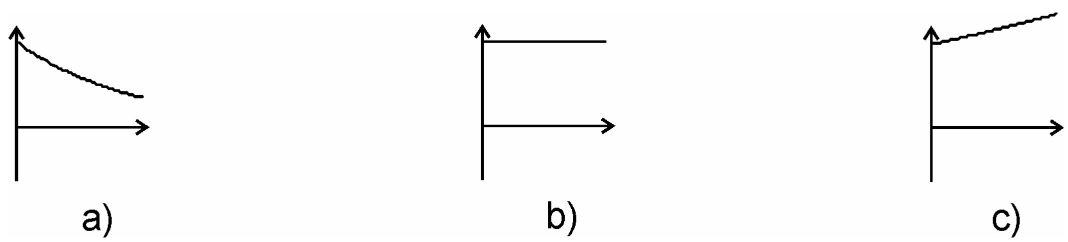
Posmatrajući sistem sa i bez povratne sprege moguće su različite situacije. Moguće je da sistem sa otvorenom povratnom spregom bude nestabilan, a da postane stabilan nakon zatvaranja povratne sprege. Moguća je obrnuta situacija (pojava mikrofonije – zatvaranje pozitivne povratne sprege), a moguće je da sistem pre i posle zatvaranja povratne sprege bude stabilan (ili nestabilan). Zatvaranjem povratne sprege pored stabilnosti sistema, mogu se podešavati i druge osobine kao što su tačnost rada sistema u stacionarnom stanju, brzina odziva, preskok, oscilatornost odziva i sl.

Osnovna podela sistema prema stabilnosti jeste na stabilne i nestabilne sisteme, i tu se govori o osobini apsolutne stabilnosti. Kod stabilnih sistema je moguće odrediti i stepen (ili rezervu) stabilnosti tako da se dolazi do pojma relativne stabilnosti. Sistemi se mogu upoređivati prema stepenu stabilnosti, tako da mogu biti relativno stabilniji ili manje stabilni. Interesantna je činjenica da su stabilniji sistemi teži za upravljanje zbog sporijeg reagovanja (odziva) od manje stabilnih. Pored apsolutno stabilnih i nestabilnih sistema (često se ovo "apsolutno" izostavlja) postoje i granični slučajevi – neutralne ili granične stabilnosti. To su sistemi koji ne spadaju ni u jednu grupu ranije definisanih, ali najčešće za male promene parametara prelaze ili u stabilne ili u nestabilne sisteme. Jedna od definicija stabilnosti bi mogla biti: ***stabilan sistem je dinamički sistem koji na ograničenu (konačnu) pobudu daje ograničen (konačan) odziv***. Ovo bi se moglo ilustrovati primerom kuglice, prikazanim na slici 1. Stabilnost dinamičkih sistema se može posmatrati na isti način kao i kuglica. Odziv sistema zavisi od početnih uslova i delovanja pobude, i može biti opadajući (slika 1a), rastući (slika 1b) ili neutralan (slika 1c) po svojoj amplitudi . Na slici 1a) je prikazan stabilan sistem, na slici 1b) nestabilan, a na 1c) granično (neutralno) stabilan.



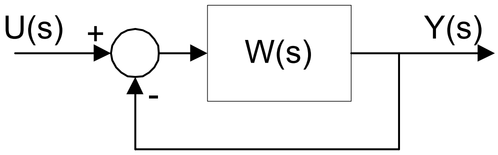
Slika 1.

Ako se kao pobuda u sistemu posmatra $\delta(t)$, koja je konačna pobuda (iščezava tokom vremena) tada se odzivi dinamičkog sistema mogu predstaviti slikom 2, gde je sistem prikazan na slici 2a) stabilan, 2b) granično stabilan i 2c) nestabilan.



Slika 2

Osobina stabilnosti je u tesnoj vezi sa položajem polova dinamičkog sistema u kompleksnoj s-ravni. Posmatra se elementarna upravljačka struktura, prikazana na slici 3.



Slika 3. Elementarna upravljačka struktura sa jediničnom negativnom povratnom spregom

Neka je:

$$W(s)=K\cdot\frac{P_m(s)}{Q_n(s)}, \tag{1}$$

gde je $n \geq m$. Funkcija spregnutog prenosa je:

$$W_s(s)=\frac{W(s)}{1+W(s)}=\frac{KP_m(s)}{KP_m(s)+Q_n(s)}. \tag{2}$$

Karakteristična jednačina je:

$$KP_m(s)+Q_n(s)=0, \tag{3}$$

i na osnovu rešenja karakteristične jednačine s_i, $i=1,2,...,n$ izraz (2) se može napisati u obliku:

$$W_s(s)=\frac{KP_m(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}. \tag{4}$$

Ako je p polova realno i prosto i r pari polova konjugovano kompleksno ($p+2r=n$), impulsni odziv sistema je:

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{p}\frac{A_i}{s+\sigma_i}+\sum_{k=1}^{r}\frac{B_k s+C_k}{s^2+2\alpha_k s+\left(\alpha_k^2+\omega_k^2\right)}, \tag{5}$$

gde su: $s_i=-\sigma_i$ realni polovi, $s_{k1,2}=-\alpha_k \pm j\omega_k$ kompleksni, a A_i, B_k i C_k konstante. Primenom inverzne Laplace-ove transformacije izraz (5) prelazi u vremenski domen, pa je:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{p}A_i e^{-\sigma_i t}+\sum_{k=1}^{r}D_k e^{-\alpha_k t}\sin(\omega_k t+\phi_k), \tag{6}$$

gde su D_k konstante koje zavise od B_k, C_k, α_k i ω_k. Iz poslednjeg izraza se vidi da će uslov:

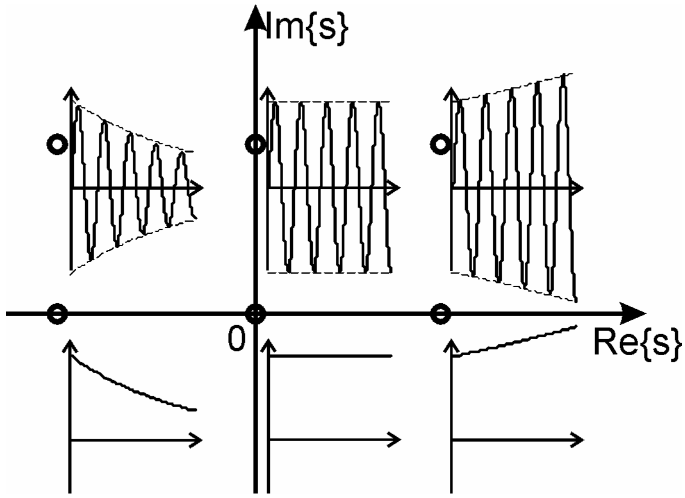
$$y_{ss}=y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=0, \tag{7}$$

Biti zadovoljen ako i samo ako je $\forall(-\sigma_i)<0$ i $\forall(-\alpha_k)<0$, odnosno ako <u>svi polovi sistema imaju realan deo manji od nule</u> (slika 4). Daljom analizom se dolazi do sledećih zaključaka:

- Ako $\exists\sigma_q=0 \wedge \forall(-\sigma_i)<0$, *gde je* $i\neq q$ i $\forall(-\alpha_k)<0 \Rightarrow y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=A_q$. Odziv sistema je konstantan u stacionarnom stanju (A_q) Jedan pol sistema se nalazi u koordinatnom početku a svi ostali u levoj poluravni kompleksne s-ravni, i sistem se nalazi na <u>aperiodičnoj granici stabilnosti</u> (slika 4).
- Ako $\exists\alpha_v=0 \wedge \forall(-\sigma_i)<0$ i $\forall(-\alpha_k)<0$, *gde je* $k\neq v \Rightarrow y_{ss}=\lim_{t\to\infty}y(t)=D_v\sin(\omega_v t+\phi_v)$. Odziv sistema u stacionarnom stanju je oscilatoran sa konstantnom amplitudom ($D_v \sin(\omega_v t+\phi_v)$). Postoji par konjugovano kompleksnih polova sistema na imaginarnoj

osi ($\alpha_v=\pm j\omega_v$) a svi ostali u levoj poluravni kompleksne s-ravni, i sistem se nalazi na oscilatornoj granici stabilnosti (slika 4).

- Ako $\exists(-\sigma_i)>0 \vee \exists(-\alpha_k)>0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$. Odziv sistema odlazi u beskonačnost, za $t\to\infty$. Postoji bar jedan pol sistema u desnoj poluravni kompleksne s-ravni i sistem je nestabilan (slika 4).



Slika 4.

Na osnovu prethodno navedenog zaključuje se da će sistem biti stabilan ako poseduje sve polove u levoj poluravni kompleksne s-ravni. Ako poseduje bar jedan pol u koordinatnom početku i/ili par polova na imaginarnoj osi, dok se svi ostali polovi nalaze u levoj poluravno kompleksne s-ravni sistem je granično stabilan. Ako sistem poseduje bar jedan pol (ili par konjugovano kompleksnih polova) u desnoj poluravni kompleksne s-ravni, bez obzira na broj polova u levoj poluravni, koordinatnom početku ili imaginarnoj osi, sistem je nestabilan. Na osnovu ovog izlaganja se vidi da kompletnu informaciju o stabilnosti nosi karakteristični polinom sistema. Na osnovu karakterističnog polinoma se formira karakteristična jednačina (3) čija su rešenja polovi sistema. Analizom prirode polova se utvrđuje stabilnost sistema. Rešavanje jednačine (3) nekada može biti prilično komplikovano (rešavanje algebarske jednačine višeg reda) pa se postavlja pitanje: da li se stabilnost sistema može ispitati bez eksplicitnog rešavanja karakteristične jednačine? Može, i u tu svrhu se koriste kriterijumi stabilnosti. Dva algebarska kriterijuma stabilnosti koja će se detaljnije obratiti su kriterijumi Routh-a i Hurwitz-a.

Algebarski kriterijumi stabilnosti Routh-a i Hurwitz-a.

Posmatra se karakteristična jednačina sistema:

$$f(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1s+a_0=0, \qquad (8)$$

(uobičajena oznaka za karakteristični polinom je *f(s)*, pa će se ona nadalje i koristiti).
Nakon rešavanja jednačine (8), polinom f(s) se može napisati u faktorizovanom obliku:

$$f(s)=a_n(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)=0, \qquad (9)$$

gde je p_i i-ti ($i=1,2,...,n$) pol sistema. Množenjem činilaca jednačine (9) se dobija:

$$f(s)=a_ns^n-a_n(p_1+p_2+...+p_n)s^{n-1}+a_n(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3+...)s^{n-2}-$$
$$-a_n(p_1p_2p_3+p_1p_2p_4+...)s^{n-3}+...+a_n(-1)^np_1p_2...p_n=0. \qquad (10)$$

Prema poslednjem izrazu se vidi da će svi koeficijenti $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0$ biti istog znaka ako su svi $Re\{p_i\}<0$, pa se dolazi do zaključka da je potreban uslov stabilnosti sistema da svi koeficijenti karakterističnog polinoma budu istog znaka (najčešće se to "istog znaka" poistovećuje sa "pozitivni"). Ovo je, nažalost, i dovoljan uslov samo za sisteme prvog i drugog reda, dok se za sisteme višeg reda moraju vršiti i dodatna ispitivanja.

Sistem prvog reda: $a_1s+a_0=0 \Rightarrow s=-\frac{a_0}{a_1}$, pa je $s<0$ ako su a_0 i a_1 istog znaka.

Sistem drugog reda: $a_2s^2+a_1s+a_0=0 \Rightarrow s_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}$, i neka su $a_2,a_1,a_0>0$.

Ako je $a_1^2\geq 4a_2a_0 \Rightarrow s_{1,2}<0$, odnosno ako je $a_1^2<4a_2a_0 \Rightarrow Re\{s_{1,2}\}<0$. Vidi se da će sistem imati polove sa negativnim realnim delovima ako su svi koeficijenti karakterističnog polinoma istog znaka.

Kod sistema višeg reda mora se primeniti neki od kriterijuma za ispitivanje stabilnosti. Takva dva algebarska kriterijuma su nezavisno jedan od drugog postavili početkom XIX veka Routh i Hurwitz. Kriterijumi su bili postavljeni sa ciljem da se odredi priroda rešenja karakteristične jednačine (8) (znak realnog dela svih rešenja jednačine) bez rešavanja iste.

<u>*Routh-ov kriterijum:*</u> Posmatra se karakteristična jednačina (8) i na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma *f(s)* se formira Routh-ova šema koeficijenata kako je to pokazano tabelom 1 (šema se sastoji iz *n+1* vrste):

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	...
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	...
$\vdots$				
s^0	h_1			

Tabela 1. Routh-ova šema koeficijenata

Prve dve vrste Routh-ove šeme koeficijenata se sastoje od koeficijenata karakterističnog polinoma, dok se elementi počevši od treće vrste pa do kraja izračunavaju na sledeći način:

$$b_1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_na_{n-3}}{a_{n-1}}$$
$$b_2=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_na_{n-5}}{a_{n-1}}$$
$$b_3=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_na_{n-7}}{a_{n-1}}$$
$$c_1=\frac{b_1a_{n-3}-a_{n-1}b_2}{b_1}$$
$$c_2=\frac{b_1a_{n-5}-a_{n-1}b_3}{b_1}$$
$$\vdots$$

Kada je šema formirana, posmatra se prva kolona – Routh-ova kolona. Sada važi teorema: broj korena algebarske jednačine koji imaju pozitivne realne delove, jednak je broju promena znaka elemenata u Routh-ovoj koloni. Na osnovu prethodnog može se definisati Routh-ov kriterijum stabilnosti: ***potreban i dovoljan uslov da bi sistem bio stabilan jeste da svi elementi Routh-ove kolone, formirane na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma, budu istog znaka*** (što se najčešće svodi na “pozitivni”). Sistem će biti granično stabilan ako se u Routh-ovoj koloni pored koeficijenata istog znaka pojavljuju i nule. Broj granično stabilnih polova je jednak broju prelaza sa nenultih na nulte vrednosti i obrnuto.

Primer R1: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom $f(s) = s^3+s^2+2s+24$.

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

$$
\begin{array}{c|ll}
s^3 & 1 & 2 \\
s^2 & 1 & 24 \\
s^1 & \dfrac{1\cdot 2-1\cdot 24}{1} = -22 & 0 \\
s^0 & \dfrac{-22\cdot 24-1\cdot 0}{-22} = 24 &
\end{array}
$$

Routh-ova kolona je:

$$
\begin{array}{|l}
1 \\
1 \\
-22 \\
24
\end{array}
$$

U Routh-ovoj koloni postoje pozitivni i negativni elementi što znači da je sistem nestabilan. Postoje 2 promene znaka ($1\rightarrow-22$ i $-22\rightarrow24$) što znači da sistem poseduje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: -3 i $1\pm j2.65$).

Primer R2: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom $f(s) = s^5+2s^4+s^3+3s^2+4s+5$.

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

$$
\begin{array}{c|lll l}
s^5 & 1 & 1 & 4 & \\
s^4 & 2 & 3 & 5 & \\
s^3 & -\frac{1}{2}\ (-1) & \frac{3}{2}\ (3) & & /\cdot 2 \\
s^2 & 9 & 5 & & \\
s^1 & \frac{32}{9}\ (32) & & & /\cdot 9 \\
s^0 & 5 & & &
\end{array}
$$

Elementi u zagradama se dobijaju ako se vrsta pomnoži najmanjim zajedničkim sadržaocem imenilaca elemenata vrste. Tokom formiranja Routh-ove šeme koeficijenata dozvoljeno je vrstu pomnožiti proizvoljnim pozitivnim brojem, što je ovde i iskorišteno. To se čini u cilju eliminacije razlomaka i olakšavanja daljeg računanja.

U Routh-ovoj koloni postoje pozitivni i negativni elementi što znači da je sistem nestabilan. Postoje 2 promene znaka ($2\rightarrow-1$ i $-1\rightarrow9$) što znači da sistem poseduje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: -2.05, $-0.71\pm j0.89$ i $0.73\pm j1.16$).

Primer R3: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom
$f(s) = s^4+2s^3+s^2+2s+1$.

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

s^4	1	1	1
s^3	2	2	
s^2	ε	1	
s^1	$2 - \frac{2}{\varepsilon}$		
s^0	1		

Ako se u Routh-ovoj koloni pojavi nula u vrsti koja nije poslednja, ta nula se privremeno menja malim pozitivnim brojem $\varepsilon \to 0$ do kraja formiranja šeme. Nakon formiranja šeme se ε zamenjuje nulom i izračunavaju elementi Routh-ove kolone, tako da je Routh-ova kolona sada:

1
2
0
$-\infty$
1

U Routh-ovoj koloni postoje pozitivni, nulti i negativni elementi što znači da je sistem nestabilan. Postoje 2 promene znaka ($2 \to 0 \to -\infty$ i $-\infty \to 1$) što znači da sistem poseduje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: -1.88, -0.53 i $0.21 \pm j0.98$).

Primer R4: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom
$f(s) = s^5+6s^4+12s^3+12s^2+11s+6$.

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

s^5	1	12	11
s^4	6	12	6
s^3	10	10	
s^2	6	6	
s^1	ε ($\varepsilon \to 0$)		
s^0	6		

Svi elementi Routh-ove kolone su nenegativni (postoje pozitivni elementi i jedna nula) što znači da je sistem granično stabilan. Postoje 2 prelaza sa nenultog na nulti elemenat (i obrnuto) ($6 \to 0$ i $0 \to 6$) što znači da sistem poseduje dva granično stabilna pola na imaginarnoj osi (polovi sistema su: -1, -2, -3 i $\pm j1$).

Primer R5: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom
$f(s) = s^5+2s^4+s^3+2s^2+s+2$.

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

s^5	1	1	1
s^4	2	2	2
s^3	0	0	
s^2	???	???	
s^1	???	???	
s^0	???	???	

Ako su u jednoj vrsti svi elementi jednaki nuli dalje određivanje elemenata Routh-ove šeme je nemoguće, jer se dobijaju neodređeni izrazi. U tom slučaju se postupa na sledeći način. Formira se pomoćni polinom $R(s)$ na osnovu koeficijenata neposredno prethodne vrste (najstariji član polinoma je s^i sa početka vrste,a ostali članovi se formiraju tako da im eksponenti opadaju za po dva). Odredi se prvi izvod $R(s)$ po promenljivoj s i koeficijenti tog novog polinoma se upisuju umesto nula u posmatranoj vrsti. Sada se normalno nastavlja dalje sa formiranjem elemenata Routh-ove šeme koeficijenata.

U ovom slučaju je: $R(s)=2s^4+2s^2+2$, te je: $\dfrac{dR(s)}{ds} = 8s^3+4s$. Sada Routh-ova šema koeficijenata:

s^5	1	1	1
s^4	2	2	2
s^3	8	4	
s^2	1	2	
s^1	-12		
s^0	2		

Routh-ova kolona sadrži pozitivne i negativne elemente. Sistem je nestabilan. Postoje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: -2, -0.5±j0.87 i 0.5±j0.87).

Primer R6: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom $f(s) = s^4-10s^2+6$.

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

s^4	1	-10	6
s^3	0	0	
s^2	???	???	
s^1	???	???	
s^0	???	???	

$R(s)=s^4-10s^2+6$, te je: $\dfrac{dR(s)}{ds} = 4s^3-20s$. Sada Routh-ova šema koeficijenata:

s^4	1	-10	6
s^3	4	-20	
s^2	-5	6	
s^1	-76		
s^0	6		

Routh-ova kolona sadrži pozitivne i negativne elemente. Sistem je nestabilan. Postoje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: ±3.06 i ±0.80).

<u>*Hurwitz-ov kriterijum:*</u> Posmatra se karakteristična jednačina (8) i na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma *f(s)* se formira Hurwitz-ova determinanta koeficijenata kako je to pokazano tabelom 1 (determinanta Δ_h je *n-tog* reda):

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a2 & a0 \end{vmatrix}$$

Sada važi teorema: potreban i dovoljan uslov da algebarska jednačina ima sve korene sa negativnim realnim delom jeste da svi dijagonalni minori Hurwitz-ove determinante budu veći od nule. Na osnovu toga se definiše Hurwitz-ov kriterijum stabilnosti na sledeći način: ***sistem će biti stabilan ako su svi dijagonalni minori Hurwitz-ove determinante, formirane na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma, veći od nule***. Prema tome potrebni i dovoljni uslovi za stabilnost sistema, prema Hurwitz-u su:

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\Delta_n = \Delta_h.$$

Pošto se u poslednjoj koloni Hurwitz-ove determinante nalaze sve nule osim a_0, to je:

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} a_0.$$

Sistem će biti nestabilan ako su neki dijagonalni minori pozitivni a neki negativni. Sistem će biti granično stabilan ako je poslednji dijagonalni minor (Δ_h) jednak nuli, a svi prethodni pozitivni.

$\Delta_n=0 \Leftrightarrow a_0=0 \vee \Delta_{n-1}=0$. Ako je $a_0=0$ tada sistem poseduje pol u koordinatnom početku, a ako je $\Delta_{n-1}=0$ sistem poseduje bar jedan par polova na imaginarnoj osi. Moguć je naravno i slučaj $a_0=\Delta_{n-1}=0$, kada postoje polovi i u koordinatnom početku i na imaginarnoj osi.

Primer H1: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom $f(s) = s^3+s^2+2s+24$.

Rešenje: Formira se Hurwitz-ova determinanta: $\Delta_h = \begin{vmatrix} 1 & 24 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 24 \end{vmatrix}$

Dijagonalni minori su:

$\Delta_1=1$

$\Delta_2=1\cdot 2-1\cdot 24=-22$

$\Delta_3=24\cdot\Delta_2=-528$

Pošto su minori različitog znaka sistem je nestabilan. Kako se sada određuje broj nestabilnih polova? Formiraju se sledeći količnici:

$$\frac{\Delta_1}{1} = 1$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{-22}{1} = -22$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-528}{-22} = 24$$

Broj promena znaka u ovom nizu jednak je broju polova sistema sa pozitivnim realnim delom, što je u ovom slučaju dva ($1\rightarrow-22$ i $-22\rightarrow 24$).

Primer H2: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom $f(s) = s^4+6s^3+6s^2+4s+6$.

Rešenje: Formira se Hurwitz-ova determinanta:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

Dijagonalni minori su:

$\Delta_1 = 6$

$\Delta_2 = 32$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = -88$$

$\Delta_4 = 6\cdot\Delta_3 = -528$

Pošto su minori različitog znaka sistem je nestabilan.

$$\frac{\Delta_1}{1} = 6$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{32}{6}$$

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-88}{32}$$

$$\frac{\Delta_4}{\Delta_3} = \frac{-528}{-88}$$

Broj promena znaka u nizu količnika jednak je dva, što znači da postoje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: -4.9, -1.4 i $0.1\pm j0.9$).

Primer H3: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom
$f(s) = s^4+2s^3+2s^2+2s+1$.

Rešenje: Formira se Hurwitz-ova determinanta:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Dijagonalni minori su:

$$\Delta_1 = 2$$
$$\Delta_2 = 2$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Delta_4 = 1 \cdot \Delta_3 = 0$$

Pošto su prva dva minora pozitivna a druga dva nula sistem je granično stabilan i sistem ima dva pola na imaginarno osi (polovi sistema su: -1, -1 i $\pm$j).

Primer H4: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom
$f(s) = s^4+3s^2+s+2$.

Rešenje: Formira se Hurwitz-ova determinanta:

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Dijagonalni minori su:

$$\Delta_1 = 0$$
$$\Delta_2 = -1$$
$$\Delta_3 = -1$$
$$\Delta_4 = -2$$

Prvi minor je nula a ostali negativni pa je sistem nestabilan.

$$\frac{\Delta_1}{1} = 0$$
$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{-1}{0} = -\infty$$
$$\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{-1}{-1} = 1$$
$$\frac{\Delta_4}{\Delta_3} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Broj promena znaka u nizu količnika jednak je dva, što znači da postoje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su: -0.29$\pm$j0.84 i 0.29$\pm$j1.57).

Stabilnost sistema opisanih matematičkim modelom u prostoru stanja

Sistem je opisan matematičkim modelom u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{11a}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}. \tag{11b}$$

Funkcija prenosa sistema je:

$$W_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}\cdot \mathrm{adj}[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\cdot\mathbf{B} + \det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]\cdot\mathbf{D}}{\det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]}. \tag{12}$$

Iz izraza (12) se vidi da je imenilac funkcije prenosa sistema *det[s**I**-**A**]*. Imenilac funkcije prenosa sistema je karakteristični polinom *f(s)*, što znači da je:

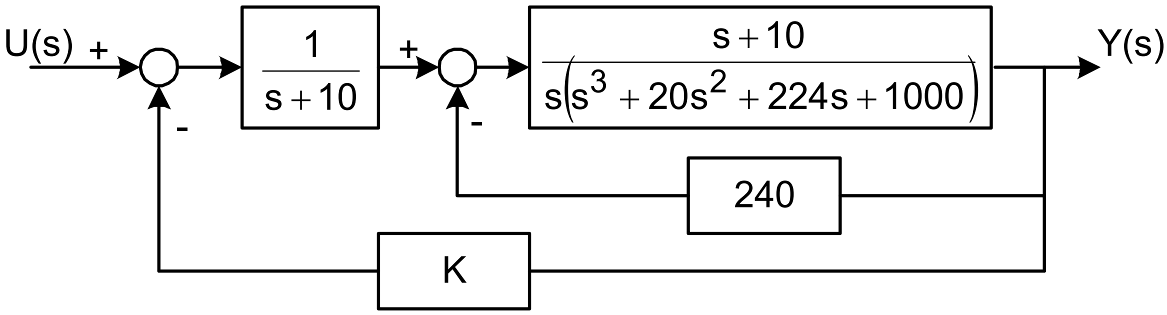
$$f(s) = \det[s\mathbf{I}-\mathbf{A}]. \tag{13}$$

Sada se za analizu stabilnosti može primeniti neki od ranije navedenih kriterijuma Routh-a ili Hurwitz-a.

Znači procedura za analizu stabilnosti sistema opisanih matematičkim modelom u prostoru stanja je:

1. formira se karakteristični polinom kao *det[s**I**-A]*;
2. na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma se formira Routh-ova šema koeficijenata ili Hurwitz-ova determinanta;
3. primene se odgovarajući kriterijumi i proceni stabilnost.

Primer. SAU je prikazan blok dijagramom na slici. Odrediti interval pojačanja K za koji je sistem stabilan.



Rešenje. Funkcija spregnutog prenosa sistema je

$$Ws(s) = \frac{1}{s^4+20s^3+224s^2+1240s+2400+K}.$$

Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = s^4 + 20s^3 + 224s^2 + 1240s + 2400 + K$. Rausova šema koeficijenata je:

s^4	1	224	2400+K
s^3	20	1240	
s^2	162	2400+K	
s^1	7644-K		
s^0	2400+K		

Da bi sistem bio stabilan svi elementi Rausove kolone moraju biti istog znaka, što se svodi na uslov:

$7644-K>0 \wedge 2400+K>0 \Rightarrow -2400<K<7644$.

Primer. Funkcija spregnutog prenosa SAU je $Ws(s) = \frac{3s^2+2}{s^5+s^4+as^3+bs^2+s+1}$, gde su a i b realni pozitivni parametri. Odrediti vrednosti parametara (a,b) za koje će sistem biti stabilan.

Rešenje. Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = s^5+s^4+as^3+bs^2+s+1$. Rausova šema koeficijenata je:

s^5	1	a	1
s^4	1	b	1
s^3	a-b	0	
s^2	b	1	
s^1	$\frac{b-a}{b}$		
s^0	1		

Da bi sistem bio stabilan svi elementi Rausove kolone moraju biti istog znaka, što se svodi na uslove: a>b $\wedge$ b>a što je kontradikcija, tako da ni za jednu vrednost parametara a i b sistem nije stabilan.

Primer. Funkcija spregnutog prenosa SAU je $W_s(s) = \dfrac{3s+4}{s^5+3s^4+5s^3+5s^2+2s+K}$, gde je K realan parametar. Odrediti interval vrednosti parametra K za koji će sistem biti stabilan.

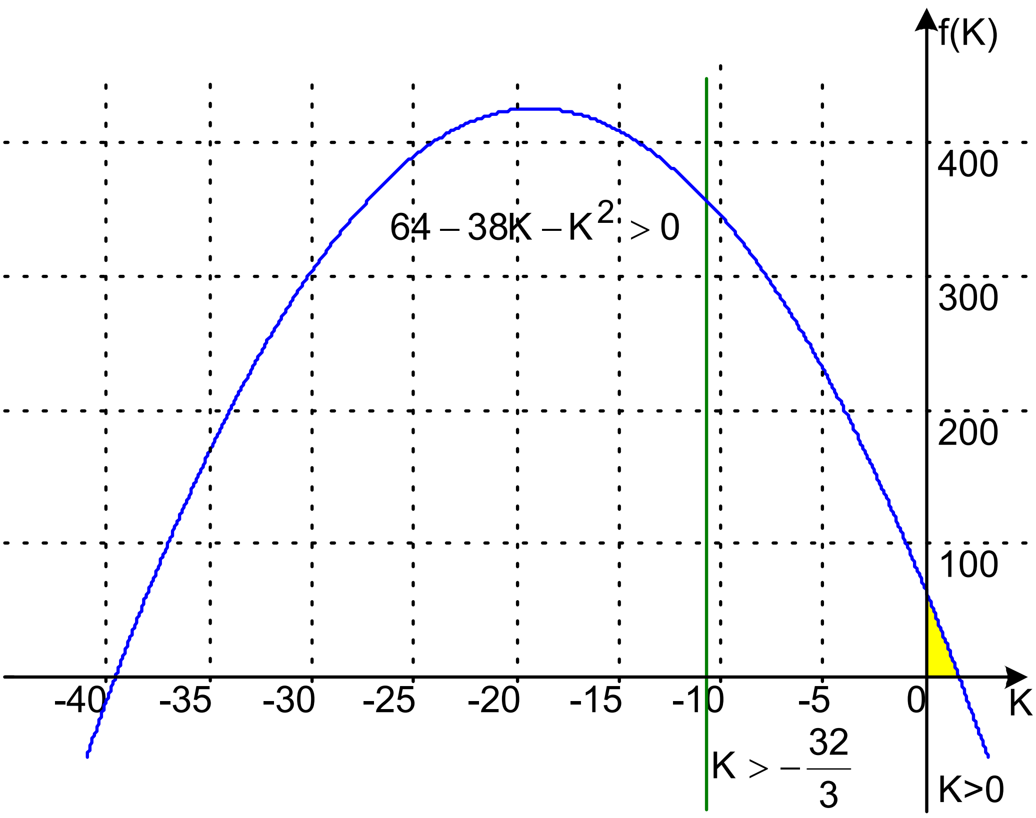
Rešenje. Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = s^5+3s^4+5s^3+5s^2+2s+K$. Rausova šema koeficijenata je:

$$
\begin{array}{c|lll}
s^5 & 1 & 5 & 2 \\
s^4 & 3 & 5 & K \\
s^3 & 10 & 6-K & \\
s^2 & 32+3K & 10K & \\
s^1 & 192-114K-3K^2=64-38K-K^2 & & \\
s^0 & K & &
\end{array}
$$

Uslov stabilnosti sistema:
K>0 (oblast desno od f(k)-ose na slici)

$32+3K>0 \Rightarrow K > -\dfrac{32}{3} = -10{,}67$ (oblast desno od prave K=-10.67)

$64-38K-K^2 > 0 \Rightarrow -39.6 < K < 1.6$ (oblas ispod parabole $64-38K-K^2 = 0$, a iznad K-ose)
Objedinjavanjem gornjih uslova dobija se uslov stabilnosti sistema 0<K<1.6. Oblast stabilnosti je osenčena na slici.

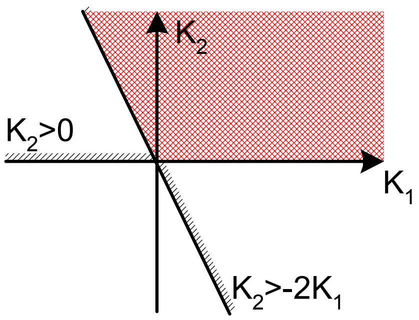


Primer. Funkcija spregnutog prenosa SAU je $Ws(s) = \dfrac{3s+5}{2s^3+8s^2+(K_1+2K_2)s+(4K_1+2K_2)}$,
gde su K_1 i K_2 realni parametri. Odrediti oblast stabilnosti sistema u ravni parametara $K_1 0 K_2$.

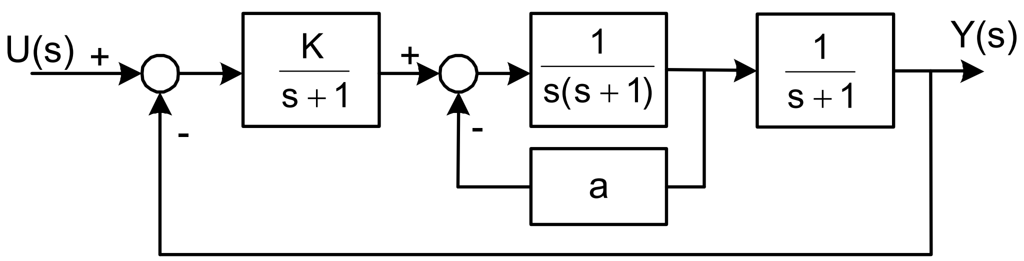
Rešenje. Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = 2s^3+8s^2+(K_1+2K_2)s+(4K_1+2K_2)$.
Rausova šema koeficijenata je:

$$\begin{array}{c|ll} s^3 & 2 & K_1+2K_2 \\ s^2 & 8 & 4K_1+2K_2 \\ s^1 & 12K_2 & \\ s^0 & 4K_1+2K_2 & \end{array}$$

Uslov stabilnosti sistema:
$K_2 > 0$
$4K_1 + 2K_2 > 0 \Rightarrow K_2 > -2K_1$.
Oblast stabilnosti je prikazana na slici.



Primer. SAU je prikazan blok dijagramom na slici. U ravni parametara a0K odrediti oblast u kojoj je sistem stabilan.



Rešenje. Funkcija spregnutog prenosa sistema je

$$Ws(s) = \frac{K}{s^4+3s^3+(3+a)s^2+(1+2a)s+(K+a)}.$$

Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = s^4 + 3s^3 + (3+a)s^2 + (1+2a)s + (K + a)$. Rausova šema koeficijenata je:

s^4	1	$a+3$	$K+a$
s^3	3	$2a+1$	
s^2	$a+8$	$3a+3K$	
s^1	$2a^2+8a+8-9K$		
s^0	$a+K$		

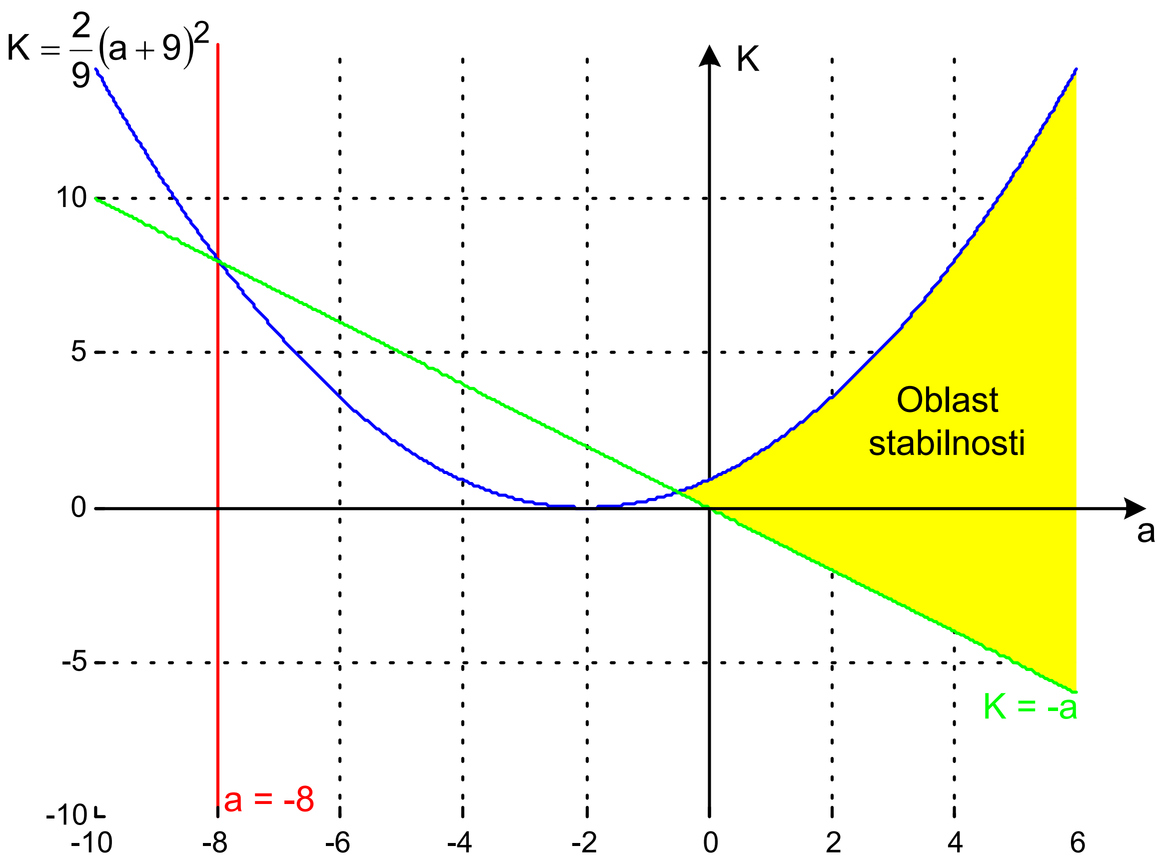
Da bi sistem bio stabilan svi elementi Rausove kolone moraju biti istog znaka, što se svodi na uslove:

$a+8 > 0 \Rightarrow a > -8$

$a+K > 0 \Rightarrow K > -a$

$2a^2+8a+8-9K > 0 \Rightarrow K < \frac{2}{9}(a+2)^2.$

Oblast stabilnosti je prikazana na slici.



Primer. Funkcija spregnutog prenosa SAU je $Ws(s) = \dfrac{(K+1)s^2+6s+8}{s^4+6s^3+(K+9)s^2+6s+8}$, gde je K realan parametar. Primenom Hurvicovog krierijuma odrediti interval vrednosti parametra K za koji će sistem biti stabilan.

Rešenje. Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = s^4+6s^3+(K+9)s^2+6s+8$. Hurvicova determinanta je

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & K+9 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & K+9 & 8 \end{vmatrix}$$

Dijagonalni minori su:
$\Delta_1 = 6$
$\Delta_2 = 6K+48 \Rightarrow K > -8$
$\Delta_3 = 36K \Rightarrow K > 0$
$\Delta_h = 288K \Rightarrow K > 0$
Sistem je stabilan za svako K>0.

Primer. Karakteristični polinom sistema je: $f(s) = s^5+s^4+7s^3+5s^2+10s+K$, gde je K realan parametar. Primenom Hurvicovog krierijuma odrediti interval vrednosti parametra K za koji će sistem biti stabilan.

Rešenje. Hurvicova determinanta je

$$\Delta_h = \begin{vmatrix} 1 & 5 & K & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & K & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & K \end{vmatrix}$$

Dijagonalni minori su:
$\Delta_1 = 1$
$\Delta_2 = 2 \Rightarrow K > -8$
$\Delta_3 = K \Rightarrow K > 0$
$\Delta_4 = K(6-K) \Rightarrow K < 6$
$\Delta_h = K^2(6-K) \Rightarrow K < 6$
Sistem je stabilan za svako 0< K < 6.